

Indice

Prefazione e ringraziamenti	vii
1 Funzioni analitiche	1
1.1 Richiami sui numeri complessi	1
1.2 Funzioni complesse di variabili complesse	4
1.3 Funzioni analitiche	6
1.4 Integrazione nel campo complesso	11
1.5 Teorema di Cauchy e funzioni primitive	15
1.6 Formula integrale di Cauchy e sue conseguenze	22
1.7 Serie di funzioni e serie di Taylor	26
1.8 Serie di Laurent	32
1.9 Residui	38
1.10 Lemma di Jordan ed applicazioni	47
1.11 Parte principale di un'integrale	55
1.12 Sommazioni	59
1.13 Metodo del punto a sella	62
2 Spazi di Hilbert e segnali	66
2.1 Introduzione	66
2.2 Misura ed integrale di Lebesgue	66
2.3 Il teorema della convergenza dominata	77
2.4 Spazi di Hilbert	81
2.5 Sistemi completi di vettori	90
2.6 Polinomi ortogonali: teoria	102
2.6.1 Formula di Rodriguez	106
2.7 Polinomi ortogonali: esempi	112
2.7.1 Caso (i): $\text{mis}(b - a) < \infty$	112
2.7.2 Caso (ii): $a = 0$ e $b = \infty$	116
2.7.3 Caso (iii): $a = -\infty$ e $b = \infty$	117
2.8 Segnali	118
2.9 Spazi di Banach	125
2.10 Ancora sugli spazi \mathcal{L}^p ed l^p	129
2.10.1 Spazi \mathcal{L}^p	129
2.10.2 Spazi l^p	134
3 Operatori limitati	139
3.1 Operatori lineari	139
3.2 Operatori su spazi di Hilbert	148
3.3 Topologie su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$	162
3.4 Spettro di un operatore	170
3.5 Altre classi di operatori limitati	178

3.5.1	Operatori positivi, radici quadrate e decomposizione polare	178
3.5.2	Operatori compatti	185
3.5.3	Operatori di classe traccia e Hilbert-Schmidt	188
3.6	Un breve cenno sugli operatori illimitati	194
3.7	Alcune formule utili	203
3.8	Alcune diseguaglianze, operatoriali e non	209
3.9	Principio di indeterminazione di Heisenberg	212
3.10	Breve introduzione al teorema spettrale	214
4	Serie di Fourier	220
4.1	La serie di Fourier in $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$	220
4.2	Alcuni esempi	224
4.2.1	Primo esempio: la funzione segno	224
4.2.2	Segnale dente di sega	227
4.2.3	L'onda triangolare	228
4.3	Forma complessa della serie di Fourier	231
4.4	Altri tipi di convergenza	233
4.4.1	Qualche risultato generale sulle successioni di funzioni	234
4.4.2	Applicazioni allo sviluppo di Fourier	238
5	Trasformata di Fourier	246
5.1	Approccio formale	246
5.1.1	La trasformata in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$	246
5.1.2	La trasformata in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$	251
5.2	Alcuni esempi notevoli	257
5.3	Genesi euristica della trasformata	260
5.4	Proprietà della trasformata di Fourier	264
5.5	Applicazione alle equazioni differenziali	270
6	Trasformata di Laplace	272
6.1	Definizione e prime considerazioni	272
6.2	Antitrasformata di Laplace	275
6.3	Proprietà della trasformata di Laplace	282
6.4	Applicazione alle equazioni differenziali	283
7	Distribuzioni: cenni	286
7.1	Prime osservazioni euristiche	286
7.2	Un po' più di rigore	290
7.2.1	Gli spazi \mathcal{D} ed \mathcal{S}	290
7.2.2	Funzionali su uno spazio di Hilbert	292
7.2.3	Distribuzioni	295
7.3	Derivata di una distribuzione	300
7.4	Proprietà della $\delta(x)$	303
7.4.1	Ulteriori caratteristiche della $\delta(x)$	305
7.5	Alcune applicazioni	307
7.6	Un esempio interessante: $\mathcal{P}(\frac{1}{x})$	308
7.7	Trasformata di Fourier e distribuzioni	312
7.8	Qualche informazione sul prodotto di convoluzione	313

8	Frame, wavelet ed analisi di multi-risoluzione	319
8.1	Introduzione e stati coerenti	319
8.2	Completezza degli autostati dell'oscillatore armonico	326
8.3	Frame	328
8.3.1	Una generalizzazione	333
8.4	Completezza e biortogonalità	336
8.4.1	Basi di Riesz	340
8.4.2	Basi di Schauder	342
8.5	Wavelet	349
8.5.1	La trasformata wavelet continua	352
8.5.2	Trasformata wavelet discreta	356
8.6	Basi o.n. di wavelet: MRA	360
8.7	Ulteriori considerazioni ed esempi	373
A	Esercizi d'esame svolti	382
A.1	Funzioni analitiche	382
A.2	Spazi di Hilbert	386
A.3	Operatori	389
A.4	Serie di Fourier	393
A.5	Trasformata di Fourier	395
A.6	Trasformata di Laplace	399
A.7	Distribuzioni	401
A.8	Equazioni differenziali	403
B	Equazioni differenziali ordinarie	406
B.1	Introduzione	406
B.2	Sul problema di Cauchy	408
B.3	Alcune classi particolari di <i>Edo</i>	415
B.3.1	Equazioni a variabili separabili	415
B.3.2	Equazioni lineari del primo ordine	417
B.3.3	<i>Edo</i> che ammettono soluzione parametrica	419
B.3.4	<i>Edo</i> esatte	421
B.4	Equazioni differenziali lineari	424
B.4.1	L'equazione omogenea	424
B.4.2	L'equazione completa	428
B.5	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti	432
B.6	Altri metodi di risoluzione	435
B.6.1	Risoluzione per serie	435
B.6.2	Metodo matriciale	437
B.6.3	La funzione di Green	438
	Bibliografia	441
	Indice analitico	444