

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami sulle equazioni alle derivate parziali</b> .....	1
1.1	Definizioni ed esempi .....	1
1.2	Necessità della risoluzione numerica .....	3
1.3	Classificazione delle EDP .....	5
1.3.1	Forma quadratica associata ad una EDP .....	8
1.4	Esercizi .....	9
<b>2</b>	<b>Richiami di analisi funzionale</b> .....	11
2.1	Funzionali e forme bilineari .....	11
2.2	Differenziazione in spazi lineari .....	13
2.3	Richiami sulle distribuzioni .....	15
2.3.1	Le funzioni a quadrato sommabile .....	17
2.3.2	Derivazione nel senso delle distribuzioni .....	18
2.4	Gli spazi di Sobolev .....	20
2.4.1	Regolarità degli spazi $H^k(\Omega)$ .....	21
2.4.2	Lo spazio $H_0^1(\Omega)$ .....	21
2.4.3	Gli operatori di traccia .....	23
2.5	Lo spazio $L^\infty(\Omega)$ e gli spazi $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ .....	24
2.6	Operatori aggiunti di un operatore lineare .....	25
2.7	Spazi di funzioni dipendenti dal tempo .....	27
2.8	Esercizi .....	28
<b>3</b>	<b>Equazioni di tipo ellittico</b> .....	31
3.1	Un esempio di problema ellittico: l'equazione di Poisson .....	31
3.2	Il problema di Poisson nel caso monodimensionale .....	32
3.2.1	Problema di Dirichlet omogeneo .....	33
3.2.2	Problema di Dirichlet non omogeneo .....	39
3.2.3	Problema di Neumann .....	39
3.2.4	Problema misto omogeneo .....	40
3.2.5	Condizioni al bordo miste (o di Robin) .....	40

3.3	Il problema di Poisson nel caso bidimensionale .....	41
3.3.1	Il problema di Dirichlet omogeneo .....	41
3.3.2	Equivalenza, nel senso delle distribuzioni, tra la forma debole e la forma forte del problema di Dirichlet .....	43
3.3.3	Il problema con condizioni miste non omogenee .....	44
3.3.4	Equivalenza, nel senso delle distribuzioni, tra la forma debole e la forma forte per il problema di Neumann .....	47
3.4	Problemi ellittici più generali .....	48
3.4.1	Teorema di esistenza e unicità .....	50
3.5	Operatore aggiunto e problema aggiunto .....	52
3.5.1	Il caso non lineare .....	55
3.6	Esercizi .....	56
<b>4</b>	<b>Il metodo di Galerkin-elementi finiti per problemi ellittici .....</b>	<b>61</b>
4.1	Approssimazione con il metodo di Galerkin .....	61
4.2	Analisi del metodo di Galerkin .....	63
4.2.1	Esistenza e unicità .....	63
4.2.2	Stabilità .....	64
4.2.3	Convergenza .....	64
4.3	Il metodo degli elementi finiti nel caso monodimensionale .....	67
4.3.1	Lo spazio $X_h^1$ .....	67
4.3.2	Lo spazio $X_h^2$ .....	69
4.3.3	L'approssimazione con elementi finiti lineari .....	71
4.3.4	Interpolazione e stima dell'errore di interpolazione .....	73
4.3.5	Stima dell'errore nella norma $H^1$ .....	75
4.4	Elementi finiti, semplici e coordinate baricentriche .....	76
4.4.1	Una definizione di elemento finito nel caso Lagrangiano ..	77
4.4.2	Semplici .....	78
4.4.3	Coordinate baricentriche .....	79
4.5	Il metodo degli elementi finiti nel caso multidimensionale .....	80
4.5.1	Risoluzione del problema di Poisson con elementi finiti ..	82
4.5.2	Condizionamento della matrice di rigidità .....	86
4.5.3	Stima dell'errore di approssimazione nella norma dell'energia .....	89
4.5.4	Stima dell'errore di approssimazione in norma $L^2$ .....	96
4.6	Il problema dell'adattività della griglia .....	100
4.6.1	Adattività a priori basata sulla ricostruzione delle derivate ..	100
4.6.2	Adattività a posteriori .....	103
4.6.3	Esempi numerici di adattività .....	107
4.6.4	Stime a posteriori dell'errore nella norma $L^2$ .....	111
4.6.5	Stime a posteriori di un funzionale dell'errore .....	113
4.7	Esercizi .....	114

<b>5</b>	<b>Equazioni paraboliche</b> .....	121
5.1	Formulazione debole e sua approssimazione .....	122
5.2	Stime a priori .....	125
5.3	Analisi di convergenza del problema semi-discreto .....	127
5.4	Analisi di stabilità del $\theta$ -metodo .....	130
5.5	Analisi di convergenza del $\theta$ -metodo .....	134
5.6	Il caso dell'approssimazione spettrale G-NI .....	137
5.7	Esercizi .....	138
<b>6</b>	<b>Generazione di griglie in 1D e 2D</b> .....	141
6.1	La generazione di griglia in 1D .....	141
6.2	Reticolazione di un dominio poligonale .....	143
6.3	Generazione di griglie strutturate .....	146
6.4	Generazione di griglie non strutturate .....	149
6.4.1	Triangolazione di Delaunay .....	150
6.4.2	Tecnica di avanzamento del fronte .....	154
6.5	Tecniche di regolarizzazione .....	156
6.5.1	Scambio delle diagonali .....	157
6.5.2	Spostamento dei nodi .....	158
<b>7</b>	<b>Algoritmi di risoluzione di sistemi lineari</b> .....	161
7.1	Metodi diretti .....	161
7.2	Metodi iterativi .....	164
<b>8</b>	<b>Cenni di programmazione degli elementi finiti</b> .....	171
8.1	Fasi operative di un codice a elementi finiti .....	171
8.1.1	Un breve cenno al codice utilizzato .....	174
8.2	Calcolo numerico degli integrali .....	175
8.2.1	Le coordinate baricentriche .....	178
8.3	Memorizzazione di matrici sparse .....	181
8.4	La fase di assemblaggio .....	185
8.4.1	Codifica delle informazioni geometriche .....	187
8.4.2	Codifica delle informazioni funzionali .....	191
8.4.3	Mappatura tra elemento di riferimento e elemento fisico ..	192
8.4.4	La costruzione dei sistemi locali e di quello globale .....	196
8.4.5	La prescrizione delle condizioni al bordo .....	200
8.5	L'integrazione in tempo .....	203
8.6	Un esempio completo .....	206
<b>9</b>	<b>Il metodo dei volumi finiti</b> .....	217
9.1	Alcuni principi elementari .....	218
9.2	La costruzione dei volumi di controllo per schemi <i>vertex-centered</i> ..	220
9.3	Discretizzazione di un problema di diffusione-trasporto-reazione ...	223
9.4	Analisi dell'approssimazione ai volumi finiti (cenno) .....	225
9.5	Implementazione delle condizioni al bordo .....	226

<b>10</b>	<b>I metodi spettrali</b> .....	229
10.1	Il metodo di Galerkin spettrale per problemi ellittici .....	229
10.2	Polinomi ortogonali e integrazione numerica gaussiana .....	233
10.2.1	Polinomi ortogonali di Legendre .....	233
10.2.2	Integrazione gaussiana .....	236
10.2.3	Le formule di Gauss-Legendre-Lobatto .....	237
10.3	Metodi G-NI in una dimensione .....	240
10.3.1	Interpretazione algebrica del metodo G-NI .....	241
10.3.2	Condizionamento della matrice di rigidità del metodo G-NI .....	243
10.3.3	Equivalenza tra il metodo G-NI e un metodo di collocazione .....	244
10.4	Generalizzazione al caso bidimensionale .....	248
10.4.1	Convergenza del metodo G-NI .....	250
10.5	Metodo G-NI e MES-NI per un problema modello monodimensionale .....	258
10.5.1	Il metodo G-NI .....	259
10.5.2	Il metodo MES-NI .....	263
10.6	Metodi spettrali su triangoli e tetraedri .....	266
10.7	Esercizi .....	270
<b>11</b>	<b>Metodi con elementi discontinui</b> .....	271
11.1	Il metodo di Galerkin discontinuo (DG) per il problema di Poisson ..	271
11.2	Il metodo mortar .....	277
11.2.1	Caratterizzazione dello spazio dei vincoli per elementi spettrali (MES) .....	280
11.2.2	Caratterizzazione dello spazio dei vincoli per elementi finiti .....	281
11.3	Formulazione mortar del problema di Poisson .....	281
11.4	Scelta delle funzioni di base .....	283
11.5	Scelta delle formule di quadratura per elementi spettrali .....	285
11.6	Scelta delle formule di quadratura per elementi finiti .....	286
11.7	Risoluzione del sistema lineare del metodo mortar .....	287
11.8	Il metodo mortar per l'accoppiamento di elementi finiti ed elementi spettrali .....	288
11.9	Generalizzazione del metodo mortar a decomposizioni con più domini .....	290
11.10	Risultati numerici per il metodo mortar .....	291
<b>12</b>	<b>Equazioni di diffusione-trasporto-reazione</b> .....	295
12.1	Formulazione debole del problema .....	295
12.2	Analisi di un problema di diffusione-trasporto monodimensionale ..	299
12.3	Analisi di un problema di diffusione-reazione monodimensionale ..	303
12.4	Relazioni tra elementi finiti e differenze finite .....	305
12.5	Diagonalizzazione della matrice di massa ( <i>mass-lumping</i> ) .....	306

12.6	Schemi decentrati e diffusione artificiale	309
12.7	Autovalori del problema di diffusione-trasporto	312
12.8	Metodi di stabilizzazione	314
12.8.1	Diffusione artificiale e schemi decentrati agli elementi finiti	315
12.8.2	Il metodo di Petrov-Galerkin	317
12.8.3	Il metodo della diffusione artificiale e della <i>streamline-diffusion</i> nel caso bidimensionale	317
12.8.4	Consistenza ed errore di troncamento per i metodi di Galerkin e di Galerkin generalizzato	319
12.8.5	Parte simmetrica e antisimmetrica di un operatore	320
12.8.6	Metodi fortemente consistenti (GLS, SUPG)	321
12.8.7	Sulla scelta del parametro di stabilizzazione	323
12.8.8	Analisi del metodo GLS	325
12.8.9	Stabilizzazione tramite funzioni a bolla	332
12.9	Il metodo DG per le equazioni di diffusione-trasporto	335
12.10	Metodi mortar per le equazioni di diffusione-trasporto	336
12.11	Alcuni test numerici per problemi di diffusione-trasporto	338
12.12	Un esempio di adattività <i>goal-oriented</i>	342
12.13	Esercizi	345
<b>13</b>	<b>Differenze finite per equazioni iperboliche</b>	<b>349</b>
13.1	Un problema di trasporto scalare	349
13.1.1	Una stima a priori	351
13.2	Sistemi di equazioni iperboliche lineari	353
13.2.1	L'equazione delle onde	355
13.3	Il metodo delle differenze finite	357
13.3.1	Discretizzazione dell'equazione scalare	358
13.3.2	Discretizzazione di sistemi iperboliche lineari	359
13.3.3	Trattamento del bordo	360
13.4	Analisi dei metodi alle differenze finite	361
13.4.1	Consistenza e convergenza	361
13.4.2	Stabilità	361
13.4.3	Analisi di von Neumann e coefficienti di amplificazione	366
13.4.4	Dissipazione e dispersione	370
13.5	Equazioni equivalenti	372
13.5.1	Il caso dello schema upwind	372
13.5.2	Il caso dei metodi di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff	377
13.5.3	Sul significato dei coefficienti nelle equazioni equivalenti	378
13.5.4	Equazioni equivalenti e analisi dell'errore	379
13.6	Esercizi	380
<b>14</b>	<b>Elementi finiti e metodi spettrali per equazioni iperboliche</b>	<b>383</b>
14.1	Discretizzazione temporale	383
14.1.1	Gli schemi di Eulero in avanti e all'indietro	383

14.1.2	Gli schemi upwind, di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff . . . . .	385
14.2	Gli schemi Taylor-Galerkin . . . . .	388
14.3	Il caso multidimensionale . . . . .	393
14.3.1	Semi-discretizzazione: trattamento forte e trattamento debole delle condizioni al bordo . . . . .	394
14.3.2	Discretizzazione temporale . . . . .	397
14.4	Elementi finiti discontinui . . . . .	400
14.4.1	Il caso unidimensionale . . . . .	400
14.4.2	Il caso multidimensionale . . . . .	405
14.5	Approssimazione con metodi spettrali . . . . .	408
14.5.1	Il metodo G-NI in un singolo intervallo . . . . .	408
14.5.2	Il metodo DG-SEM-NI . . . . .	412
14.6	Trattamento numerico delle condizioni al bordo per sistemi iperbolici . . . . .	414
14.6.1	Trattamento debole delle condizioni al bordo . . . . .	418
14.7	Esercizi . . . . .	420
<b>15</b>	<b>Cenni a problemi iperbolici non lineari . . . . .</b>	<b>421</b>
15.1	Equazioni scalari . . . . .	421
15.2	Approssimazione alle differenze finite . . . . .	426
15.3	Approssimazione con elementi finiti discontinui . . . . .	428
15.4	Sistemi iperbolici non-lineari . . . . .	434
<b>16</b>	<b>Le equazioni di Navier-Stokes . . . . .</b>	<b>441</b>
16.1	Formulazione debole delle equazioni di Navier-Stokes . . . . .	443
16.2	Le equazioni di Stokes e la loro approssimazione . . . . .	448
16.3	Problemi di punto-sella . . . . .	452
16.3.1	Formulazione del problema . . . . .	452
16.3.2	Analisi del problema . . . . .	453
16.3.3	Approssimazione con il metodo di Galerkin ed analisi di stabilità e convergenza . . . . .	457
16.4	Formulazione algebrica del problema di Stokes . . . . .	460
16.5	Un esempio di problema stabilizzato . . . . .	465
16.6	Un esempio numerico . . . . .	466
16.7	Discretizzazione in tempo delle equazioni di Navier-Stokes . . . . .	468
16.7.1	Metodi alle differenze finite . . . . .	469
16.7.2	Metodi alle caratteristiche (o Lagrangiani) . . . . .	471
16.7.3	Metodi a passi frazionari . . . . .	472
16.8	Risoluzione del sistema di Stokes e metodi di fattorizzazione algebrica . . . . .	475
16.9	Problemi di fluidi a superficie libera . . . . .	479
16.9.1	Equazioni di Navier-Stokes con densità e viscosità variabili . . . . .	480
16.9.2	Condizioni al contorno . . . . .	481
16.9.3	Applicazioni ai fluidi a superficie libera . . . . .	482
16.10	Modelli per l'evoluzione dell'interfaccia . . . . .	484

16.10.1	Rappresentazione dell'interfaccia con metodi espliciti . . . .	484
16.10.2	Rappresentazione dell'interfaccia con metodi impliciti . . .	484
16.11	Approssimazione a volumi finiti . . . . .	489
16.12	Esercizi . . . . .	492
<b>17</b>	<b>Introduzione al controllo ottimale per equazioni a derivate parziali . . .</b>	<b>495</b>
17.1	Definizione del problema di controllo ottimale . . . . .	495
17.2	Un problema di controllo per sistemi lineari . . . . .	497
17.3	Alcuni esempi di problemi di controllo ottimale per il problema di Laplace . . . . .	498
17.4	Alcuni risultati per minimi di funzionali . . . . .	499
17.5	La teoria del controllo ottimale per problemi ellittici . . . . .	502
17.6	Alcuni esempi di problemi di controllo ottimale . . . . .	506
17.6.1	Un problema di Dirichlet con controllo distribuito . . . . .	506
17.6.2	Un problema di Neumann con controllo distribuito . . . . .	507
17.6.3	Un problema di Neumann con controllo di frontiera . . . . .	508
17.7	Test numerici . . . . .	508
17.8	Formulazione di problemi di controllo mediante lagrangiana . . . . .	513
17.8.1	Ottimizzazione vincolata per funzioni in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	514
17.8.2	L'approccio mediante Lagrangiana . . . . .	515
17.9	Risoluzione del problema di controllo: il metodo iterativo . . . . .	517
17.10	Esempi numerici . . . . .	522
17.10.1	Dissipazione di calore da un'aletta termica ( <i>thermal fin</i> ) . .	522
17.10.2	Inquinamento termico in un fiume . . . . .	524
17.11	Alcune considerazioni su osservabilità e controllabilità . . . . .	527
17.12	Due paradigmi di risoluzione: "discretizzare-poi-ottimizzare" oppure "ottimizzare-poi-discretizzare" . . . . .	528
17.13	Approssimazione numerica di un problema di controllo ottimale per equazioni di diffusione-trasporto . . . . .	530
17.13.1	Gli approcci: "ottimizzare-poi-discretizzare" e "discretizzare-poi-ottimizzare" . . . . .	532
17.13.2	Stima a posteriori dell'errore . . . . .	533
17.13.3	Un problema test: controllo delle emissioni di inquinanti . .	536
17.14	Esercizi . . . . .	538
<b>18</b>	<b>Il metodo di decomposizione dei domini . . . . .</b>	<b>539</b>
18.1	Alcuni classici metodi iterativi basati su DD . . . . .	540
18.1.1	Il metodo di Schwarz . . . . .	540
18.1.2	Il metodo di Dirichlet-Neumann . . . . .	542
18.1.3	Il metodo di Neumann-Neumann . . . . .	544
18.1.4	Il metodo di Robin-Robin . . . . .	545
18.2	Formulazione multi-dominio del problema di Poisson ed equazioni di interfaccia . . . . .	545
18.2.1	L'operatore di Steklov-Poincaré . . . . .	546

18.2.2	Equivalenza tra il metodo di Dirichlet-Neumann e il metodo di Richardson .....	548
18.3	Approssimazione con elementi finiti del problema di Poisson e formulazione per sotto-domini .....	550
18.3.1	Il complemento di Schur .....	553
18.3.2	L'operatore di Steklov-Poincaré discreto .....	554
18.3.3	Equivalenza tra il metodo di Dirichlet-Neumann e il metodo di Richardson preconditionato: il caso algebrico ..	556
18.4	Generalizzazione al caso di più sotto-domini .....	558
18.4.1	Alcuni risultati numerici .....	561
18.5	Precondizionatori nel caso di più sotto-domini .....	562
18.5.1	Il preconditionatore di Jacobi .....	564
18.5.2	Il preconditionatore di Bramble-Pasciak-Schatz .....	565
18.5.3	Il preconditionatore di Neumann-Neumann .....	566
18.6	I metodi iterativi di Schwarz .....	570
18.6.1	Forma algebrica dei metodi di Schwarz per una discretizzazione ad elementi finiti .....	571
18.6.2	Il metodo di Schwarz come preconditionatore .....	573
18.6.3	Metodi di Schwarz a due livelli .....	577
18.7	Un risultato astratto di convergenza .....	580
18.8	Condizioni all'interfaccia per altri problemi differenziali .....	581
18.9	Esercizi .....	584
<b>19</b>	<b>Metodi a basi ridotte per l'approssimazione di EDP parametrizzate ..</b>	<b>589</b>
19.1	EDP parametrizzate: il caso ellittico coercivo .....	591
19.1.1	Un esempio preliminare .....	593
19.2	Principali componenti di un metodo a basi ridotte .....	594
19.3	Il metodo a basi ridotte .....	597
19.3.1	Spazi a basi ridotte .....	598
19.3.2	Proiezione di Galerkin .....	599
19.3.3	Procedura Offline-Online .....	601
19.4	Interpretazione algebrica e geometrica del problema RB .....	602
19.4.1	Interpretazione algebrica del problema (G-RB) .....	603
19.4.2	Interpretazione geometrica del problema (G-RB) .....	605
19.4.3	Formulazioni alternative: problemi Least-Squares e di Petrov-Galerkin .....	608
19.5	Costruzione degli spazi ridotti .....	610
19.5.1	Algoritmo greedy .....	610
19.5.2	Proper Orthogonal Decomposition (POD) .....	613
19.6	Analisi a priori dell'errore .....	617
19.7	Stima a posteriori dell'errore .....	620
19.7.1	Una relazione tra l'errore e il residuo .....	620
19.7.2	Stimatore dell'errore .....	621
19.7.3	Calcolo della costante di coercività discreta .....	622

19.8	Valutazione efficiente della stima dell'errore .....	622
19.8.1	Calcolo della norma del residuo .....	624
19.8.2	Valutazione del fattore di stabilità .....	624
19.9	Un esempio numerico .....	625
19.10	Esercizi .....	629
	<b>Riferimenti bibliografici</b> .....	631
	<b>Indice analitico</b> .....	645