Programmi di potenziamento della cognizione numerica e logico-scientifica
Collana diretta da Daniela Lucangeli

Marta Todeschini, Irene Cristina Mammarella, Daniela Lucangeli
e Eugenia Pellizzari

IMPARO A RISOLVERE I PROBLEMI DI GEOMETRIA

*Potenziamento del problem solving geometrico
per il secondo ciclo della scuola primaria
e per la scuola secondaria di primo grado*

8-13 ANNI

Erickson

Indice

Introduzione

Le *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* del 16 novembre 2012 sottolineano con rinnovata chiarezza il ruolo delle conoscenze matematiche nella formazione culturale delle persone e delle comunità, attraverso lo sviluppo delle «capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" […] offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concreti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. [...] Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo».

Sono parole che ci sostengono nel nostro sforzo di restituire il valore culturale all'insegnamento della geometria.

In realtà nella scuola, la geometria è stata relegata a lungo a un ruolo di disciplina affrancata da ogni riferimento al reale: il criterio essenziale di validità diviene la correttezza formale del ragionamento portando a un allontanamento dell'insegnamento della geometria nella scuola primaria. A lungo si è cercato di riprodurre l'impostazione euclidea nell'insegnamento della scuola di base. Introdurre questa disciplina iniziando da concetti o da definizioni lontani dall'esperienza dell'alunno, risulta un percorso al rovescio in quanto tali concetti e definizioni dovrebbero essere considerati invece punto di arrivo di un percorso di apprendimento costruttivo e personale dello studente. Anteporre a tutto le formule del calcolo dell'area del trapezio o il perimetro di un triangolo isoscele rimane un grosso errore in quanto non è utile né agli insegnanti né ai matematici, e tantomeno ai bambini.

La risposta culturale deve essere forte, esplicita, visibile, e deve essere evidente nella pratica scolastica quotidiana. La geometria è vista come forma di cultura, riconoscibile nei prodotti materiali e simbolici della cultura di appartenenza ed è assunta come «punto di vista», come prospettiva conoscitiva per comprendere e interpretare la realtà.

Chiediamoci infatti quanto importante è stata la geometria nella storia della matematica. La geometria è la più antica delle teorie create dall'uomo e ha rappresentato per due millenni il campo di sapere più importante della matematica; anzi, rappresentava la matematica. Platone e Aristotele chiamavano se stessi geometri:

prima di tutto c'era la geometria. Se l'avvicinamento dell'insegnante alla disciplina deve partire da un approccio non direttamente collegato all'epistemologia della scienza, bensì alla storia della scienza perché i bambini e poi i ragazzi facciano in qualche modo un percorso coerente al loro sviluppo cognitivo, allora la geometria non può e non deve partire dagli enti fondamentali, bensì da ciò che affascina il bambino come ha affascinato all'inizio lo studio dello spazio nei secoli passati.

Partire dal vissuto del bambino vuol dire cogliere le potenzialità che esso dimostra fin dai 3 anni dove piccoli *problem solving* visuo-spaziali sono perfettamente nel patrimonio cognitivo dell'alunno.

Vediamo allora che la constatazione storica si affianca a quella psicologica. I bambini sono perfettamente in grado di cogliere i concetti fondamentali, anzi, alcuni autori parlano di innatismo di essi (Dehaene et al., 2006).

Se dunque apprendere la geometria è possibile fin dalla tenera età, proseguendo gli studi essa assume un ruolo sempre più importante nello studio della matematica e assolve in pieno alla sua funzione formativa.

Probabilmente fermarsi a formule e calcoli vuol dire rinunciare alla risorsa formativa che la geometria ha, mentre invece far diventare lo studio della geometria un affascinante percorso di ragionamento apre la mente degli alunni alla bellezza delle forme.

Le Indicazioni del curricolo sottolineano inoltre l'importanza dei problemi matematici: «Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legati alla vita quotidiana e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola».

Gli esempi che si possono trovare in questo libro sono nati dalla pratica quotidiana scolastica, ma possono essere benissimo modificati dagli insegnanti tenendo sempre conto degli obiettivi del compito stesso.

Nei prossimi paragrafi approfondiremo le difficoltà che di solito incontrano i bambini nella risoluzione di problemi matematici e quale modello teorico sottende a questo programma di potenziamento della soluzione di problemi di geometria. Infine, verrà presentato il programma di potenziamento e dei risultati ottenuti durante la fase di sperimentazione del materiale.

Processi cognitivi e metacognitivi coinvolti nella soluzione dei problemi

La soluzione dei problemi

I primi lavori relativi all'analisi dei processi di soluzione dei problemi sono stati compiuti da psicologi il cui ambito di ricerca può essere ricondotto alla teoria della Gestalt (per rassegne in Italiano si veda Lucangeli e Passolunghi, 1995). Secondo gli psicologi della Gestalt il processo di risoluzione di un problema è più di una semplice riproduzione di risposte apprese e implica una ristrutturazione degli elementi. In altre parole, in alcuni problemi la soluzione può essere trovata solo dopo un cambiamento di prospettiva, una «ristrutturazione» nel considerare gli elementi della situazione. Tale cambiamento si verifica grazie all'*insight*, ovvero un'intuizione improvvisa in cui i vari elementi del problema vengono visti in una prospettiva nuova (Wertheimer, 1920). Spesso un ostacolo alla ristrutturazione degli elementi del problema è dato dal fissare l'attenzione su una sola funzione di un elemento del problema. Questo aspetto, largamente studiato, è denominato «fissità funzionale».

In contrapposizione alle situazioni per *insight* vi sono i problemi definiti *routinari*, ovvero quelle situazioni problematiche affrontate e risolte di frequente, nelle quali viene applicata una procedura di soluzione nota. I problemi *routinari* possono essere anche considerati una sorta di esercizio, in cui la tensione cognitiva verso la soluzione è decisamente ridotta e l'attenzione è soprattutto rivolta a un'applicazione rigorosa di metodi appresi in precedenza. La differenza fra esercizi e problemi non è determinata dal tipo di situazione: non vi sono situazioni che a priori sono da considerarsi problemi veri e propri piuttosto che esercizi *routinari*. Una differenza fondamentale fra questi due tipi di situazioni è data dal «vissuto» dell'individuo. Nei problemi, quando si supera il punto cruciale e si sente finalmente di aver imboccato la via che porta alla soluzione, si ha la caratteristica sensazione di soddisfazione per l'avvenuta scoperta. Niente di tutto questo avviene con gli esercizi: in caso di successo il sentimento provato è solo di essere giunti al punto cercato, dopo una serie di tentativi più o meno difficoltosi.

Alcuni comportamenti degli insegnanti, per quanto giustificati dall'importanza dei problemi *routinari*, indeboliscono, se non addirittura creano degli ostacoli alla creatività degli alunni, enfatizzando le difficoltà di bambini che, per una certa rigidità mentale, incontrano potenziali difficoltà nella soluzione di problemi nuovi. Per questo motivo è importante ridurre la ripetizione meccanica di procedure già apprese e limitare la presentazione di soluzioni già pronte.

Processi cognitivi implicati nel problem solving matematico

Come accennato in precedenza, ciò che caratterizza il problema matematico da un punto di vista dell'alunno è che le conoscenze che esso richiama sono necessarie ma non sufficienti per giungere alla soluzione; il problema esige che l'alunno utilizzi le sue conoscenze e nello stesso tempo faccia una scoperta, trovi una strada nuova, una strategia risolutiva e quindi chieda una abilità di integrazione delle varie componenti cognitive e abilità metacognitive. Durante il processo di soluzione di un problema è, inoltre, richiesto all'alunno di mettersi in gioco in prima persona su un risultato non certo e quindi le variabili emotivo-motivazionali assumono una sfumatura particolare.

Un buon solutore è spesso rapido, efficiente e consapevole dei passi da seguire o da evitare, e usa in maniera corretta e flessibile i vari processi di controllo. Una parte cospicua dei problemi proposti a scuola si caratterizza per essere costituita da prove in cui la situazione problematica viene proposta verbalmente, e la soluzione ai quesiti viene ottenuta tramite una serie di operazioni aritmetiche. Solitamente tali problemi sono di tipo *routinario* (si veda il paragrafo precedente), ossia situazioni simili, seppure con una diversa formulazione linguistica, già proposte in precedenza, che sottendono un medesimo schema risolutivo.

Mayer (1987; 1998) ha cercato di esplicitare quali sono i processi cognitivi sottesi alla soluzione dei problemi.

Secondo Mayer, la soluzione di un problema ha inizio con il processo di codifica che è a sua volta suddiviso nei processi di *traduzione* e *integrazione*. Alla codifica segue il processo di ricerca della soluzione distinto anch'esso in due fasi di elaborazione dell'informazione e precisamente *pianificazione* e *calcolo*.

Durante il *processo di traduzione* il potenziale solutore inizia a costruire una rappresentazione interna del problema a partire dal testo verbale.

Durante il *processo d'integrazione* il solutore cerca invece di integrare le varie parti del problema in una struttura unitaria. In relazione alle fasi d'integrazione delle informazioni, oltre alla formazione di un modello mentale del problema, particolare importanza deve essere attribuita al processo di «categorizzazione», ossia dell'individuazione della categoria generale alla quale il problema può appartenere (Hinsley, Hayes e Simon, 1977; Passolunghi, 1999; Passolunghi, Lonciari e Cornoldi, 1996). Tale processo permette di riconoscere la struttura profonda del testo, indipendentemente dalla formulazione linguistica (struttura superficiale), ovvero il suo «schema» matematico di riferimento.

Individuare e utilizzare la struttura profonda del problema è un processo fondamentale per connettere fra di loro le informazioni e permettere la selezione di quelle rilevanti per giungere alla soluzione.

Secondo Mayer il *processo di pianificazione* presuppone una conoscenza strategica che si riferisce all'abilità di costruire e monitorare il piano di soluzione, riconoscendo quali operatori applicare e quando è il momento opportuno di utilizzarli (si veda Mayer, 1987). Per quanto riguarda il successo nella pianificazione, due sono le condizioni necessarie: *a)* la generazione di sotto-obiettivi; *b)* la memoria di lavoro che consente di mantenere attiva e facilmente disponibile la struttura delle mete da aggiungere.

Dopo la rappresentazione del problema in memoria e l'individuazione del piano di soluzione, ha luogo il *processo di calcolo* in cui il solutore identifica quali operazioni bisogna utilizzare per raggiungere i vari sotto-obiettivi.

Il presente programma di potenziamento è articolato a partire dal modello proposto da Lucangeli, Tressoldi e Cendron (1998a) che integra le diverse componenti implicate nella soluzione di problemi ed è schematizzato nella figura 1.

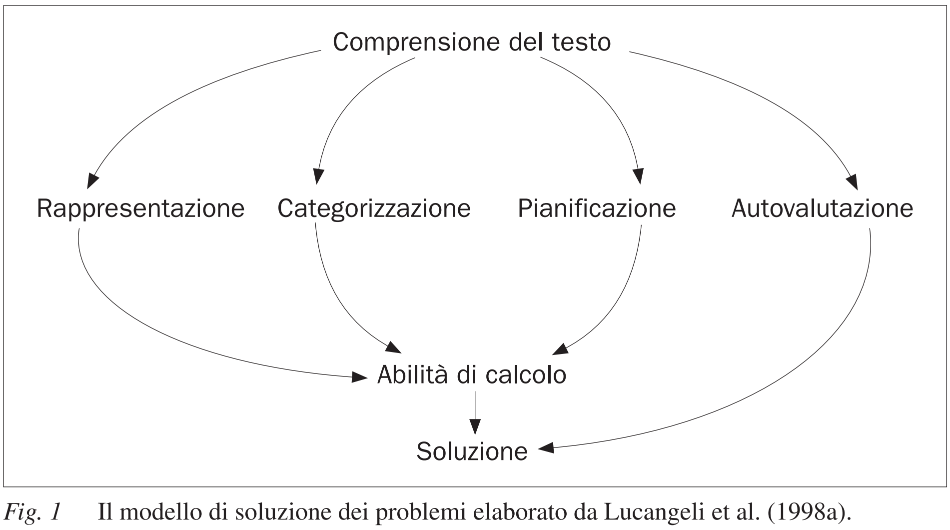


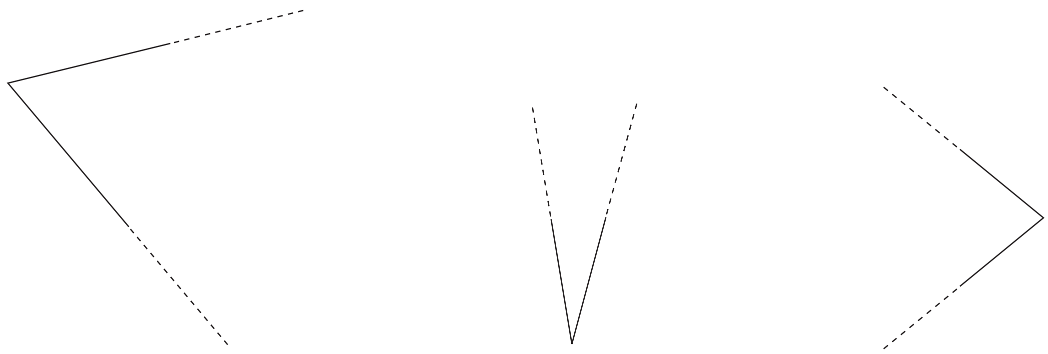
Fig. 1 Il modello di soluzione dei problemi elaborato da Lucangeli et al. (1998a).

Attività 2

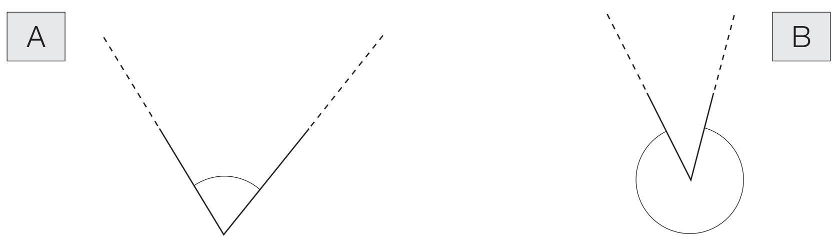
Problemi o esercizi?

▶ Ora che hai approfondito la differenza tra problemi ed esercizi, prova a leggere e classificare anche questi compiti completando la tabella finale.

1. Tra tutti questi angoli, colora gli angoli acuti di giallo e quelli ottusi di rosso.



2. Quali dei seguenti due angoli è più ampio?



3. Un tappeto rettangolare è lungo 35 cm e largo 20 cm. Quanto misura la sua area?

4. Un campo di calcetto ha il perimetro di 300 m. Un lato misura 50 m. Quanto misura l'altro lato?

5. Un rettangolo ha il lato minore di 10 cm. Il suo lato maggiore misura il doppio del lato minore. Calcola il perimetro del rettangolo.

6. Disegna usando il goniometro: un angolo di 45°, uno di 60°, uno di 120°.

7. Marco vuole tassellare la superficie del suo tavolo da lavoro, che ha queste dimensioni: 65 cm e 105 cm, con dei rettangoli di carta colorata. Quanti tasselli colorati di 6,5 cm per 10,5 cm dovrà usare?

Attività 2

La rappresentazione è il primo passo verso la soluzione del problema

▶ A questo punto sarai d'accordo sul fatto che è molto importante saper rappresentare i problemi e farlo correttamente.
Se non sei ancora convinto prova a svolgere questi problemi senza farne la rappresentazione grafica.

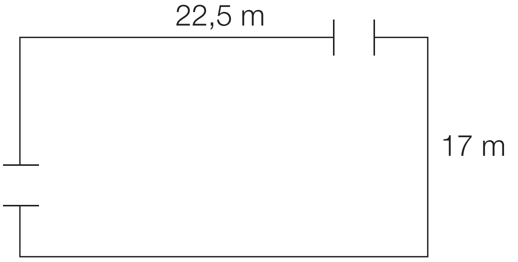
1. Un contadino deve recintare il suo orto con una rete metallica. L'orto è rettangolare e misura 22,5 m e 17 m. Deve lasciare 110 cm per ogni cancello, i cancelli sono due. Quanta rete metallica serve a quel contadino?
2. Il geometra Flavio ha un foglio rettangolare con il perimetro di 20 cm. Il lato maggiore supera quello minore di 2 cm. Calcola le dimensioni del foglio.
3. Nonna Luisa deve cucire due segmenti di stoffa. La somma di due segmenti misura 9 cm e uno è il doppio dell'altro. Calcola la lunghezza dei due segmenti.

▶ Pensi di riuscirci? Se sì, sicuramente ti sarai costruito un'immagine mentale! Prova a prendere in esame il primo problema.

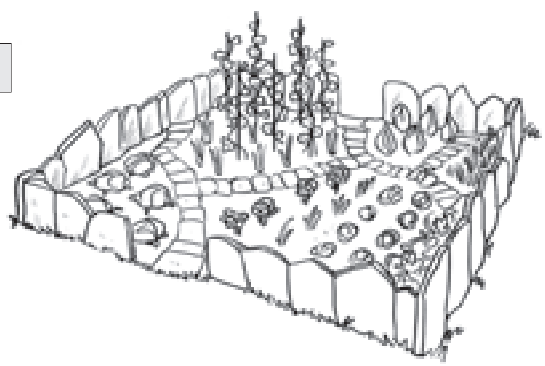
Problema n. 1
Un contadino deve recintare il suo orto con una rete metallica. L'orto è rettangolare e misura 22,5 m e 17 m. Deve lasciare 110 cm per ogni cancello, i cancelli sono due. Quanta rete metallica serve a quel contadino?

Ti proponiamo di seguito alcune rappresentazioni relative a questo problema: sono tutte corrette, ma forse alcune non ti aiutano a trovare il piano di soluzione, mentre altre ti aiutano di più. Scegli la rappresentazione che secondo te è più adatta a descriverlo. Analizza le figure che ti presentiamo e indica quali sono le figure più utili per te.

A



B



Fase
3

LA STIMA DEI RISULTATI: monitorare i risultati intermedi e finali

▶ Un'altra azione da compiere è la STIMA DEI RISULTATI da ottenere.
È importante stimare anche i risultati intermedi e non solo quello finale.
I risultati intermedi sono quelli che non rispondono alla domanda del problema, ma sono necessari per completare lo svolgimento del compito e per ottenere il risultato finale. Mentre risolvi un problema prova sempre a chiederti:

- Il risultato che ho scritto è verosimile in base ai dati?
- Guardando la figura il risultato sembra corretto?
- I numeri che ottengo sono quelli che mi aspettavo o sono molto diversi?

Adesso torniamo al problema dell'esempio.

▶ LA STIMA DEL RISULTATO FINALE

- Il risultato finale è un numero? ______________________________
- Quali risposte possono esserci al quesito finale? ____________________

▶ LA STIMA DEI RISULTATI INTERMEDI

- Cosa ti aspetti dai calcoli intermedi? ____________________________
- E dal confronto? ______________________________________
- Quali valori per le due aree ti aspetti? ___________________________
- Quali numeri invece potrebbero farti venire il dubbio di aver sbagliato?

  ____
- Pensi che realizzare una stima dei risultati sia importante?

  ____

  ____
- Quali rischi potresti correre se non la facessi?

  ____

  ____

▶ Discutine con i tuoi compagni e con l'insegnante.

Fase 4

L'AUTOVALUTAZIONE: valutare il lavoro complessivo, dopo lo svolgimento

▶ L'ultima azione da compiere è l'AUTOVALUTAZIONE. Ora che sei diventato un esperto solutore di problemi, al termine del tuo lavoro, risulta molto utile riflettere sui passaggi svolti e valutare la tua prestazione.

- Di solito, in un'attività che svolgi abitualmente, cos'è che ti fa dire: «Sono stato proprio bravo?».

  ____

  ____

- Sei stato bravo perché ti sei impegnato e hai imparato cose nuove?

  ____

  ____

- Sei stato bravo perché hai ottenuto un buon risultato?

  ____

  ____

- Ritieni di essere stato bravo perché ti dicono «Bravo!» gli altri (genitori, amici, insegnanti)?

  ____

  ____

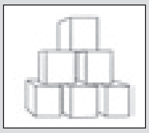
- Sei stato bravo perché ritieni di avere svolto il lavoro seguendo un metodo efficace?

  ____

- E ora torniamo alla geometria: cosa credi di dover fare nei problemi di geometria per poterti dire «bravo»?

  ____

  ____

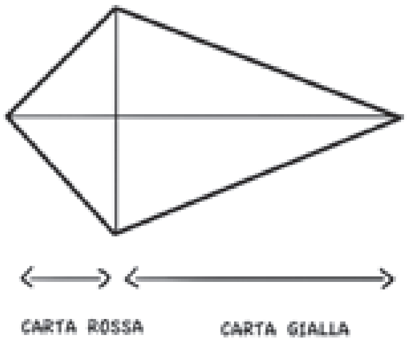


Attività 3

Impara dall'esperienza*

▶ Risolvi i problemi aiutandoti con le attività proposte nelle due schede precedenti.

1. Per costruire un aquilone come quello in figura, un ragazzo utilizza due listelli di legno, uno lungo 80 cm e l'altro lungo 120 cm; li sistema come in figura, in modo che il più corto tagli il più lungo in due parti, una il doppio dell'altra. Il ragazzo vuole realizzare la parte anteriore dell'aquilone con carta rossa, la parte posteriore con carta gialla. Calcola:
- l'area dell'aquilone
- quanta carta rossa e quanta carta gialla è necessario acquistare per costruire tre aquiloni uguali.



2. Un appezzamento di terreno è rappresentato su una carta in scala 1:2000 e le sue dimensioni sono di 12 cm e di 20 cm. L'appezzamento deve essere recintato lungo tutto il perimetro. Calcola la spesa totale per la recinzione sapendo che costa 12 euro al metro.

3. In un serbatoio di forma cubica avente lo spigolo interno di 4 m, vengono versati 8000 litri d'acqua. Quale livello raggiunge il liquido? Quanta acqua si può ancora versare nel serbatoio?

4. Per costruire un grande tendone di forma semisferica, sono stati adoperati 2512 m di tessuto. Quale sarà l'area coperta dal tendone?

* Problemi indicati per le classi II e III.

Attività 4

Problemi e... scherzetti

▶ Sai che qualche volta nei problemi sono nascosti degli scherzetti? Prova a scoprire lo scherzetto che c'è nel problema seguente.

Piazza dell'Anfiteatro a Lucca ha una forma approssimabile con un cerchio il cui raggio misuri 14 m. Nei giorni di mercato è occupata da 20 bancarelle di forma quadrata, il cui lato misura 4 m. Quanto spazio rimane libero per passeggiare, sapendo che si aprono sulla piazza 4 antiche porte medievali?

- Hai capito qual è lo scherzetto?

FAI ATTENZIONE!

Alcuni problemi contengono, oltre ai dati utili, anche delle informazioni superflue, cioè dei dati che non sono necessari per risolvere correttamente il problema. Anzi, in alcuni casi complicano proprio la situazione, facendoti sorgere dubbi che altrimenti non ti sfiorerebbero.
Che ci siano 4 porte lungo il perimetro della piazza è un'informazione utile per la soluzione del problema?
Osserva ora il problema strutturato in questo modo:

Piazza dell'Anfiteatro a Lucca ha una forma approssimabile con un cerchio il cui raggio misuri 14 m; è circondata da un porticato rotondo su cui si aprono 4 antiche porte medioevali equidistanti. Nei giorni di mercato la piazza è occupata da 20 bancarelle di forma quadrata, il cui lato misura 4 m. Quanto spazio rimane libero per passeggiare? Quanto distano tra loro le 4 porte?

In questo caso non ci sono dati inutili!

▶ INVENTA TU!

Prova insieme ai tuoi compagni a inventare un problema ciascuno inserendo delle informazioni superflue, e poi scambiatevelo. Riuscite a scoprire i dati di troppo e a riformulare il problema in modo che i dati inutili diventino necessari?

Attività 2

Un problema per esperti!

▶ Risolviamo insieme un problema piuttosto articolato, in modo da capire quanto è importante pianificare. Leggi il testo.

Un prisma retto ha per base un trapezio isoscele che ha le diagonali perpendicolari al lato obliquo: esse misurano 240 cm ciascuna e il lato obliquo è i $\frac{3}{4}$ di esse. Calcola l'area laterale e il volume del prisma sapendo che è alto 26 cm.

1. Rifletto: di quali dati dispongo? Tali informazioni ti suggeriscono già quali formule è bene richiamare alla memoria?

____

____

2. Che tipo di problema è? Cosa mi chiede?

____

____

3. Rappresento. Fai attenzione a disegnare correttamente la figura, in base a quanto hai ricavato dalle precedenti riflessioni!

Dati? Domande?

____

____