

Introduzione

I motivi che ci hanno portato a mettere a punto una batteria per l'esame delle componenti di base dell'apprendimento matematico sono molteplici: la passione per lo sviluppo e la crescita dei bambini, l'interesse per l'apprendimento scolastico e per il suo impatto sui meccanismi di costruzione del sé e, infine, per il piacere e la curiosità che il mondo dei numeri e della matematica trasmette.

Predisporre una batteria per l'analisi delle basi dell'apprendimento significa assumere un punto di vista basato sulla prevenzione delle difficoltà o disturbi, vuol dire essenzialmente potenziare e costruire sulle risorse personali di ciascun bambino tutte quelle abilità di base che sono necessarie per un apprendimento scolastico che abbia le caratteristiche della «normalità».

Sono note le conseguenze dell'aver ignorato o d'ignorare una difficoltà negli apprendimenti scolastici di base, ed è risaputo che un intervento abilitativo/riabilitativo ha maggiori probabilità di essere efficace quanto più avviene precocemente.

Per tutte queste ragioni ci siamo sobbarcate la fatica e il piacere di mettere a punto uno strumento volto alla identificazione di profili d'intelligenza numerica che permette di:

- valutare la conoscenza del bambino, in analogia con quanto avviene nell'area linguistica, relativamente agli aspetti cognitivi e metacognitivi implicati nell'apprendimento della matematica;

- cogliere le differenze individuali, ovvero individuare i punti forti e gli eventuali punti deboli di ogni soggetto, definendone il profilo corrispondente.

Tutto questo allo scopo di adeguare l'intervento educativo e/o riabilitativo alle caratteristiche del soggetto, indirizzandolo e focalizzandolo sulle priorità, per poter concentrare le risorse educative proprio dove è maggiormente necessario.

I problemi connessi alla valutazione dei precursori dell'apprendimento scolastico sono ben presenti sia a chi opera nel mondo della scuola, sia a ricercatori e studiosi che si occupano di apprendimento scolastico e delle relative problematiche. Se per quanto riguarda la lettura e la scrittura si può affermare che, nel panorama italiano, esistono numerosi strumenti sia a carattere generale che specifico, per la matematica, invece, si osserva una certa povertà di materiali. Crediamo con quest'opera di aver iniziato a colmare questa lacuna, sebbene il cammino da compiere sia ancora lungo.

Precede il lavoro di individuazione delle componenti di base una descrizione dello sviluppo di quella che viene definita «intelligenza numerica», utile per comprendere perché tanti bambini possono presentare delle difficoltà nell'acquisizione del numero. I numeri, infatti, sono strumenti culturali utilizzati trasversalmente in molteplici attività che presuppongono abilità diverse. Basti pensare che essi sono usati per indicare una data, un'ora sul quadrante dell'orologio, un canale televisivo, le pagine di un libro. Questi usi sembrano implicare abilità lontane dalla capacità di servirsi dei numeri per calcolare o per misurare. Calcolare, ad esempio, significa saper usare fatti aritmetici (ad esempio, tabelline), applicare procedure (con riporti e prestiti) a volte lunghe e complesse (come nella divisione), ragionare aritmeticamente ($5 + 3 = 3 + 5$; oppure se $a - b = c$, allora $b + c = a$).

Seguiranno quindi le parti relative alla presentazione della batteria nelle sue componenti processuali e di uso dello strumento, la validazione psicometrica, le ricerche e gli studi realizzati con le prove e, infine, le norme per l'attribuzione del punteggio e la lettura e interpretazione dei risultati.

Sviluppo dell'intelligenza numerica

Competenze numeriche preverbalì (0-2 anni)

Piaget e Szemiska (1968) ritenevano che il concetto di numero (valore cardinale e ordinale) non potesse emergere prima dei 5-6 anni proprio perché costruito sullo sviluppo delle capacità tipiche del pensiero operatorio: ragionamento transitivo, conservazione della quantità, astrazione dalle proprietà percettive. Successivamente, Antell e Keating (1983) hanno verificato che neonati da 1 a 12 giorni di vita riescono a discriminare insieme di due o tre elementi. I due psicologi americani hanno utilizzato la tecnica dell'«abituazione-disabituazione» che si basa sul fatto che i bambini guardano più a lungo gli stimoli nuovi: osservare a lungo una stessa cosa li porta ad «abituarsi», a perdere interesse, mentre una cosa nuova li «disabituata» poiché induce interesse. Nella sequenza sperimentale a ogni neonato venivano presentati alternativamente due cartoncini con due punti neri uguali, più o meno distanziati, in modo da indurre abituazione, in seguito veniva mostrato loro un terzo cartoncino «disabituante» con tre punti neri allineati. I neonati, anche di un solo giorno di vita, osservavano più a lungo questo nuovo oggetto. Per controllare che non si trattasse di una semplice preferenza per immagini con un maggior numero di punti, gli autori hanno anche proposto la sequenza sperimentale inversa e verificato che gli stessi risultati si ottenevano se dopo aver abituato il bambino ai tre elementi si passava ai due. I neonati sono

dunque sensibili alla quantità e sono capaci di differenziare gli insiemi in base alla numerosità degli elementi contenuti.

Starkey, Spelke e Gelman (1990) hanno riscontrato tale capacità innata conducendo lo stesso tipo di esperimenti su bambini di 6-8 mesi. In questa indagine, durante la fase di abituação, invece di punti neri, più o meno distanziati, sono state utilizzate figure diverse, cosicché ogni cartoncino risultasse «nuovo», ma uguale per numerosità (due arance, due chiavi, ecc.). Anche in questo caso lo stimolo disabituaante (cartoncino con tre figure) è stato osservato significativamente più a lungo degli altri, dimostrando come la categorizzazione fosse avvenuta in modo astratto, senza tener conto delle caratteristiche particolari delle figure (colore, forma, dimensione, ecc.) che cambiavano ogni volta.

E se si trattasse solo di una forma di percezione di modelli visivi e non di numerosità? Immagini immobili di oggetti costituiscono particolari modelli geometrici: un oggetto è un punto, due una retta, tre (non allineati) un triangolo, ecc. Il bambino potrebbe limitarsi a discriminare tali modelli. Questa ipotesi, formulata da Mandler e Shebo (1982), è stata indagata da Van Loosbroek e Smitsman (1990). Nel loro esperimento hanno mostrato a bambini di 5 e 13 mesi immagini in movimento: due o tre rettangoli in varie tonalità di grigio percorrevano traiettorie casuali sullo schermo di un computer, rendendo così impossibile l'identificazione di modelli visivi. Nonostante questo, come in tutti gli altri studi, quando il numero dei rettangoli cambiava, i tempi di osservazione aumentavano significativamente, dimostrando come i bambini reagissero alla numerosità degli oggetti in movimento.

Le ricerche di Karen Wynn (1995) hanno evidenziato come la sensibilità del bambino alla numerosità vada oltre la percezione di oggetti, immobili o in movimento, e riguardi anche insiemi di azioni. Quando bambini di 6 mesi, «abituaati» a vedere una marionetta fare due salti, ne vedevano compiere tre, raddoppiavano i tempi di osservazione.

Neonati e bambini di pochi mesi sono dunque capaci di percepire la numerosità di un insieme visivo di oggetti in modo immediato, senza contare. Come già indicato, tale processo specializzato di percezione visiva viene chiamato «subitizing» o «immediatizzazione» (Atkinson, Campbell e Francis, 1976; Mandler e Shebo, 1982) e il numero massimo di oggetti percepibili in questo modo sembra essere di quattro circa.

Il possesso del concetto di numerosità implica che il bambino non solo discrimini due insiemi in base al numero di elementi contenuti, ma possieda anche aspettative aritmetiche basate sul concetto di numerosità.

Wynn (1992) ha riscontrato come bambini di 5-6 mesi sappiano compiere semplici operazioni di tipo additivo ($1+1$) e sottrattivo ($2-1$). Nell'esperimento dell'addizione, in un teatrino veniva presentato un pupazzo che poi veniva nascosto

da uno schermo. Un secondo pupazzo veniva mostrato e aggiunto al primo dietro lo schermo. Alla fine lo schermo si alzava rivelando la presenza di due pupazzi (il che era in linea con un'aspettativa di addizione, $1+1=2$) o di un solo pupazzo (il che non lo era, $1+1\neq 1$). I bambini guardavano più a lungo questa seconda situazione, il che suggeriva che questa deludesse la loro aspettativa. L'esperimento di sottrazione era analogo, solo che inizialmente venivano presentati e nascosti due pupazzi, e successivamente si vedeva che uno di questi veniva sottratto. I bambini guardavano più a lungo nel caso in cui alla fine apparissero due pupazzi ($2-1\neq 2$) piuttosto che uno ($2-1=1$).

I bambini nascono quindi con la capacità di eseguire processi di addizione e sottrazione che li portano a nutrire aspettative aritmetiche.

Afferma Butterworth che la natura fornisce un nucleo di capacità per classificare piccoli insiemi di oggetti nei termini delle loro numerosità, ma per le capacità più avanzate abbiamo bisogno dell'istruzione, ossia di acquisire gli strumenti concettuali forniti dalla cultura in cui viviamo (1999).

Se esiste una competenza numerica preverbale, innata e indipendente dalla manipolazione linguistico-simbolica, imparare a contare rappresenta il primo collegamento tra natura e cultura.

Passaggio all'acquisizione delle parole-numero e sviluppo delle abilità di conteggio (2-4 anni)

Capire come evolvano le abilità di conteggio implica spiegare in che modo compaia la capacità di codificare le quantità attraverso il sistema verbale dei numeri, e in che modo essa si sviluppi fino a permettere la piena padronanza dei meccanismi della conta.

Secondo Gelman e Gallistel (1978), l'acquisizione dell'abilità di conteggio verbale è guidata dalla conoscenza innata di alcuni principi basati sulla competenza numerica non verbale. I tre *principi impliciti* del «contare» individuati dai due autori sono:

- il principio della *corrispondenza biunivoca* (a ogni elemento dell'insieme contato deve corrispondere una sola parola-numero e viceversa);
- il principio dell'*ordine stabile* (le parole-numero devono essere ordinate in una sequenza fissa e inalterabile);
- il principio della *cardinalità* (l'ultima parola-numero usata nel conteggio rappresenta la numerosità dell'insieme).

I principi impliciti della conta guidano l'attenzione del bambino verso gli stimoli ambientali pertinenti (ad esempio, parole-numero). Le parole-numero che i

bambini apprendono dal linguaggio vengono sistemate sulla loro lista di «etichette-numero mentali»: uno, due, tre... quindici... Secondo Gallistel e Gelman (1992), il ruolo di schema di riferimento, svolto dal meccanismo non verbale, sarebbe reso possibile dalla similarità tra la struttura formale delle grandezze non verbali e quella delle parole-numero (isomorfismo). Le due forme di rappresentazione sarebbero distinte, ma al tempo stesso interrelate. Imparando a contare si formerebbe cioè una «mappatura bidirezionale» tra le grandezze non verbali (che rappresentano la numerosità) e le parole-numero. È tale mappatura bidirezionale a consentire l'uso e la specificità, sia dei meccanismi analogici di quantificazione non verbale, sia dei meccanismi verbali di conteggio.

Dal punto di vista evolutivo, la padronanza di tali principi comincia verso i 2-3 anni e, per la maggior parte dei bambini, si completa attorno ai 5 anni. Il principio della cardinalità viene acquisito per ultimo. Già a 2 anni appare il concetto di corrispondenza biunivoca indipendentemente dall'acquisizione della sequenza verbale delle parole che esprimono i numeri: il bambino distribuisce un giocattolo a ogni persona, mette ogni tazza sul suo piattino, ecc. Anche quando conosce la sequenza corretta dei vocaboli-numero, tende a indicare uno a uno gli oggetti che conta. Fino ai 4 anni non è però chiara la relazione tra questa strategia e il conteggio: ad esempio, il bambino sa utilizzare la strategia «uno per te e uno per me» per distribuire equamente dolci, ma se poi lo sperimentatore li conta e afferma di averne quattro, il bambino non è in grado di inferire di averne lo stesso numero (Pesenti, Seron e Van Der Linden, 1995). Per quanto riguarda il principio di cardinalità, i bambini di 3 anni e mezzo sono abili nel dire l'ultima parola del conteggio come numero degli oggetti contati, ma questo non significa che comprendano realmente che il processo del contare fornisca la numerosità dell'insieme. Spesso si tratta di una semplice imitazione del comportamento degli adulti. Come dimostrato da Gelman e Meck (1983), se si chiede a un bambino di questa età quanti siano i dinosauri che ha appena contato, può capitare che ricominci a contarli daccapo. A volte, a questa età, i bambini credono che le parole-numero siano semplici etichette attaccate agli oggetti: usano l'ultima parola del conteggio per dire quanti sono gli oggetti contati, ma se si chiede loro uno specifico numero di oggetti ne afferrano una manciata a caso. Wynn (1990) li chiama «arraffoni», e descrive come si comportano:

SPERIMENTATORE: E allora quanti sono?

ADAM: [contando tre oggetti] Uno, due, cinque!

SPERIMENTATORE: [indicando i tre oggetti] Quindi ce ne sono cinque?

ADAM: No, quello è *cinque* [indicando l'oggetto che ha etichettato come «cinque»].

SPERIMENTATORE: Che ne dici di contarli così, uno, due, cinque? [lo sperimentatore conta gli oggetti secondo un ordine diverso da quello di Adam].

ADAM: No, *questo* è cinque [indicando quello che ha continuato a indicare come «cinque»].

Invece di delineare lo sviluppo dei principi operativi della conta, Fuson, con la *teoria dei contesti diversi* (1988) ha analizzato l'acquisizione dei significati che il bambino associa alle parole-numero e il modo in cui questi vengono integrati. Secondo l'autrice le «competenze concettuali» di conteggio, pur rispondendo a funzioni strutturali specifiche e innate, vengono sviluppate attraverso ripetuti esercizi e per imitazione. Da questa prospettiva, cruciale per la costruzione della conoscenza numerica è l'interazione con l'ambiente. Infatti, sebbene i semanti dei numeri siano sempre gli stessi, le situazioni in cui essi sono utilizzati sono molto diverse e possono determinare differenze nei significati e nell'uso dei numeri. Per esemplificare come si manifesti tale complessità di usi e significati può essere utile riportare alcune risposte di bambini italiani alle seguenti domande:

«Cosa sono i numeri? A cosa servono i numeri, secondo te?» (Lucangeli, 1999).

M. (4 anni e 8 mesi): *Scritte un po' diverse, non sono lunghe lunghe come le parole.*

L. (5 anni): *Sono che ti servono quando hai i soldini o le bambole. Se ne hai di più o di meno delle tue amichette.*

T. (5 anni): *Sono numeri scritti o detti a voce. O anche sulle dita, uno per uno, ci si conta.*

R. (5 anni e 2 mesi): *I numeri sono fatti per dire uno, due, tre, e poi non sbagliare fino a dieci o fino a dove sai tu.*

S. (5 anni e 2 mesi): *I numeri piccoli servono a contare, i numeri grandi a scrivere a scuola.*

D. (5 anni): *I grandi ci fanno molte cose. Di più che i bambini. Infatti ci fanno anche la spesa.*

Come risulta evidente dalla lettura dei protocolli riportati, i bambini riconoscono diversi aspetti implicati nel numero: aspetti lessicali (i numeri si scrivono, si dicono, ecc.), aspetti semantici (relativi alle quantità), e aspetti funzionali di calcolo e conteggio (i numeri servono a...).

Inizialmente il bambino utilizza le parole-numero solo all'interno degli specifici contesti senza riuscire a collegarli. Progressivamente, dai 2 agli 8-9 anni, il bambino acquisisce e integra i diversi significati d'uso fino a riconoscere che nella sequenza numerica ogni parola-numero si riferisce al totale delle unità che la precedono e la includono (valore cardinale), e che qualsiasi unità della serie assume il valore «più uno» in relazione all'unità precedente e «meno uno» rispetto alla successiva (valore ordinale).

L'evoluzione dell'abilità di conteggio implica, secondo Fuson, l'integrazione dei seguenti tre aspetti:

- la padronanza della sequenza numerica;
- l'acquisizione della corrispondenza uno a uno tra le parole-numero e gli elementi contati;
- il riconoscimento del valore cardinale del numero.

Per quanto riguarda il primo aspetto, nell'*acquisizione della sequenza numerica* il bambino è coinvolto nella differenziazione delle parole-numero dalle altre e nell'apprendimento del loro ordine in sequenza. L'uso competente di questi concetti inizia all'età di 3-4 anni e procede fino agli 8-9 anni con l'acquisizione, per intervalli, di unità e decine (in un primo periodo la sequenza verbale è corretta fino al 10, poi fino al 20, per arrivare a 100 verso i 6-8 anni).

Contemporaneamente all'apprendimento della sequenza verbale, il bambino impara a stabilire una *corrispondenza biunivoca* corretta tra le parole-numero e gli elementi dell'insieme contato. Di solito il bambino indica gli oggetti che conta, in modo da facilitarli nel collegare entità temporali (parole) e spaziali (oggetti), ma tale azione è spesso accompagnata da alcune tipologie di errori. Vi sono gli errori «parola-indicazione», in cui il bambino indica un oggetto senza pronunciare nessuna parola-numero oppure pronunciandone molte, e quelli «indicazione-oggetto», in cui il conteggio e l'indicazione sono coordinati, ma è quest'ultima a essere imprecisa (il bambino mentre indica gli oggetti ne salta uno oppure ne indica uno più volte). Ci sono bambini che violano entrambe le corrispondenze citate, ad esempio, indicando più volte lo stesso oggetto senza pronunciare nessuna parola numero, oppure pronunciando velocemente più parole-numero mentre indicano genericamente l'insieme di oggetti. Errori più globali sono invece quelli in cui il bambino, una volta terminata la conta, ricomincia a indicare gli oggetti dell'insieme già contati. Le diverse tipologie di errori riscontrate dimostrano che i bambini più piccoli possono incontrare difficoltà nell'integrazione dell'indicazione e del conteggio vero e proprio. L'apprendimento corretto della corrispondenza biunivoca impegna il bambino fino ai 5 anni circa.

Riguardo al terzo aspetto, secondo Fuson, occorre aspettare che il bambino abbia 4 anni circa affinché sappia riconoscere il *valore cardinale* delle parole-numero pronunciate. Prima di tale età la conta non ha per il bambino un significato cardinale, ed è probabile che quando gli viene chiesto di indicare il numero di oggetti di un insieme egli risponda con l'ultima parola-numero pronunciata nella conta senza comprendere che si riferisce alla cardinalità dell'insieme stesso (si vedano gli studi già citati di Gelman e Meck, 1983 e di Wynn, 1990).

In sintesi, seguendo il modello di Fuson, si possono individuare *cinque livelli evolutivi*, a cui corrispondono specifiche strutture concettuali di sequenza, di conta,

di valore cardinale, e distinte forme di integrazione tra queste. Tali fasi possono essere descritte attraverso le risposte fornite da bambini italiani nell'indagine già menzionata di Lucangeli (1999):

1. la sequenza di numeri è usata come stringa di parole (ad esempio, Luca 4 anni: «uno, due, sette, quattro, cinque, tre, venti...»);
2. si distinguono le parole-numero, ma l'intera sequenza è unidirezionale, in avanti, e viene prodotta a partire dall'uno (ad esempio, Alberto 4 anni e 6 mesi: «uno, due, tre, quattro, cinque e poi non so bene»);
3. la sequenza è producibile a partire da un numero qualsiasi della serie stessa governata dalle relazioni numeriche di subito, prima, dopo, ecc. (ad esempio, Sara 5 anni: «subito vicino a 5 c'è 6 e poi sette e otto e poi fino a venti te li dico tutti giusti»);
4. le parole-numero della sequenza sono trattate come entità distinte che non devono più ricorrere a elementi concreti di corrispondenza biunivoca (ad esempio, Lucia 5 anni e 3 mesi: «quattro è più di tre. Cinque è di più di quattro»);
5. la sequenza è usata come catena bidirezionale, sulla quale e attraverso la quale operare in modi distinti (ad esempio, «Mattia 6 anni e 5 mesi: sette, otto, nove, dieci... venti, diciannove, diciotto...»).

Tale evoluzione non è da considerarsi rigida o precostituita, ma esemplificativa della continua interazione tra competenze cognitive e apprendimenti significativi (per una sintesi del modello si veda Liverta Sempio, 1997).

Il numero scritto in età prescolare (3-6 anni)

Nella letteratura psicologica il processo di acquisizione della scrittura del numero è stato prevalentemente indagato nell'ambito degli studi relativi allo sviluppo della competenza simbolica.

Secondo Piaget (1972; Piaget e Inhelder, 1970), la capacità di rappresentare un oggetto o un evento (significato) tramite un altro (significante) si sviluppa a partire dal secondo anno di età. Tra i 2 e i 7 anni l'attività simbolica del bambino comprende sia la produzione di significanti «individuali» (simboli) legati al referente da una relazione di somiglianza stabilita dal singolo soggetto, sia quella di significanti «collettivi» (segni) connessi al significato da una convenzione sociale. In particolare, l'acquisizione del segno da parte del bambino implica il passaggio dall'uso personale a quello convenzionale. Inizialmente il segno viene quindi utilizzato come simbolo e ne assume le caratteristiche (mobilità di significato); solo in un momento successivo la relazione tra significante e significato diventa

stabile e condivisa (accesso ai sistemi simbolici standard della cultura). Le notazioni matematiche, in quanto segni, seguono tali condizioni di sviluppo.

Altri studi più recenti confermano la rilevanza dell'età prescolare per lo sviluppo della competenza simbolica. Gardner (1987) ipotizza che a 2 anni il bambino acquisisca la capacità di ricoprire diversi ruoli e a 3 anni quella di produrre simboli di tipo analogico, per giungere a rappresentare gli aspetti quantitativi della realtà attorno ai 4 anni. L'accesso al sistema simbolico «notazionale» avverrebbe a 5-7 anni. Da parte sua, Karmiloff-Smith (1992) evidenzia come la comprensione del sistema di notazione in quanto oggetto di conoscenza in sé preceda quella della notazione come strumento comunicativo-referenziale. Già a 4 anni i bambini discriminano le diverse espressioni simboliche (disegno, scrittura linguistica, notazione numerica) in base ai vincoli specifici del sistema notazionale di appartenenza: ad esempio, la presenza di singoli elementi e la ripetizione di elementi identici vengono considerate appropriate per la scrittura del numero, ma non per quella delle parole. A 5-6 anni il bambino diventa capace di manipolare i vincoli dei sistemi simbolici (ad esempio, per scrivere numeri inesistenti ricorre a disegni o a combinazioni di lettere), ma solo dopo i 6 anni, quando acquisisce la consapevolezza di tale conoscenza e la capacità di resoconto verbale, utilizza le notazioni come strumenti comunicativo-referenziali.

Numerosi studi sottolineano come il bambino in età prescolare utilizzi diversi tipi di formato grafico per esprimere la quantità. In particolare Hughes (1982; 1987) propone di classificare tale variabilità espressiva in base a *quattro categorie di rappresentazione*:

- *idiosincratice*, priva di notazioni comprensibili per l'osservatore;
- *pittografica*, che riproduce figurativamente gli oggetti della collezione;
- *iconica*, formata da segni grafici (aste, lettere, ecc.) posti in corrispondenza biunivoca con gli oggetti;
- *simbolica*, costituita da numeri arabi veri e propri.

Dal punto di vista evolutivo, si è osservato che i bambini di 3-4 anni ricorrono molto a notazioni sia idiosincratice che pittografiche, mentre quelli di 4-5 anni usano prevalentemente segni iconici (lettere e altri simboli), e cominciano a utilizzare numeri arabi, dimostrando maggiore capacità di astrazione. Già a 5 anni il numero arabo viene usato con familiarità, ma solo dai 5-6 anni la maggior parte dei bambini dimostra di saper scegliere il simbolo corrispondente alla quantità esatta (entro il 9), anche se si riscontrano con frequenza errori di scrittura quali la specularità e le rotazioni.