

Franco Ciccacci

# Fondamenti di Fisica Atomica e Quantistica

II edizione





**FRANCO CICCACCI**

*Politecnico di Milano*

FONDAMENTI DI  
FISICA ATOMICA E QUANTISTICA  
II ED.

Franco Ciccacci  
Fondamenti di Fisica Atomica e Quantistica – II ed.  
Copyright © 2017, EdiSES srl - Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0  
2020 2019 2018 2017

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata*



*A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilare o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La Casa Editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.*

*L'Editore*

*Fotocomposizione:* EdiSES srl – Napoli

*Stampato presso la:* Print Sprint srl - Napoli

*Per conto della:*

EdiSES srl – Piazza Dante 89 – 80135 Napoli  
Tel. 081/7441706-07 Fax. 081/7441705

ISBN 978 8879 599 788

<http://www.edises.it>

E-mail: [info@edises.it](mailto:info@edises.it)

## **Prefazione alla seconda edizione**

*Questa nuova edizione tiene conto delle modifiche apportate al modo di erogazione del corso di Introduzione alla Fisica dei Quanti per gli studenti del secondo anno della Laurea Triennale in Ingegneria Fisica al Politecnico di Milano (corso per il quale questo è il libro di testo consigliato), come maturate nel corso degli ultimi anni.*

*In particolare, per venir incontro all'esigenza di ridurre il carico didattico di un corso in ogni caso abbastanza impegnativo, si è deciso di eliminare alcuni argomenti (conteggio dei modi normali, meccanica statistica classica e quantistica, teoria quantistica dell'interazione luce-atomo), che nel corso di studi di cui sopra hanno trovato spazio in corsi degli anni successivi. La trattazione di tali argomenti, rimossa dal testo vero e proprio, è riportata per motivi di completezza come Appendice.*

*Si è mantenuta in ogni caso la struttura originale, basata su una parte introduttiva fenomenologica abbastanza corposa, volta a far acquisire familiarità con i concetti quantistici molto gradualmente, seguita da una trattazione più formale dei vari argomenti. Il libro si apre ancora con due capitoli introduttivi, dedicati a cenni storici il primo e ai metodi e risultati della fisica classica (formalismo lagrangiano e hamiltoniano, teorema dell'equipartizione dell'energia) il secondo. Pur avendo di molto ridotto lo spazio di questi ultimi argomenti, tradizionalmente non coperti nei corsi di fisica di base, si è ritenuto che la loro presenza, per quanto accennata, fosse ancora utile per favorire la comprensione degli argomenti più propriamente di fisica dei quanti affrontati nel seguito.*

*Per motivi di coerenza generale, anche a seguito alle modifiche di cui sopra, è stata poi fatta una revisione che ha portato a diversi aggiustamenti, parziale rimodulazione e modifica della sequenza in cui gli argomenti vengono presentati: il caso più evidente è lo spostamento della discussione dell'interazione spin-orbita nel nuovo Cap. 16 dedicato alla struttura fine degli spettri atomici, dopo aver trattato, nel Cap. 15, gli atomi a molti elettroni nell'approssimazione di campo centrale. Lo spirito generale e gli argomenti trattati nel complesso rimangono però immutati, per cui continuano a valere tutte le considerazioni già presenti nella prefazione alla prima edizione.*

*Per come è attualmente strutturato, il libro è calibrato su un corso da 10 cfu (crediti formativi unitari), in cui dovrebbe essere possibile far rientrare tutti gli argomenti*

*trattati nei 16 capitoli, inclusi gli approfondimenti contenuti nel paragrafo “Complementi, applicazioni, esempi” che chiude ogni capitolo. In alternativa, si può decidere di dedicare meno spazio a tali approfondimenti, a vantaggio di altre tematiche ritenute di rilievo (anche in base ai programmi e all’ordinamento dei vari corsi di studi), per esempio elementi di fisica molecolare, o di relatività ristretta, o anche alcuni degli argomenti attualmente presenti in Appendice.*

*Infine, si è cercato di porre (parziale) rimedio a uno dei difetti più evidenti della prima edizione (l’assenza di problemi con relativa soluzione) con la pubblicazione di un altro breve testo anch’esso edito da EdiSES (F. Ciccacci, A. Benfenati, R. Farinaro: *Introduzione alla Fisica dei Quanti: Temi d’esame risolti*), in cui sono riportate le soluzioni a numerosi problemi tratti da temi di esame da me preparati negli scorsi anni, e che costituisce un naturale completamento del presente libro.*

*Milano, Novembre 2017*

## **Prefazione alla prima edizione**

*Questo libro nasce dall'esperienza maturata in diversi anni di insegnamento in corsi dedicati all'introduzione dei concetti base della fisica moderna rivolti agli studenti dei primi anni della Laurea Triennale delle Facoltà di Ingegneria. Si tratta in particolare dell'elaborazione di note preparate per diversi corsi che si sono susseguiti negli anni sotto vari titoli (Fondamenti di Meccanica Quantistica, Fondamenti di Fisica della Materia, Struttura della Materia, Introduzione alla Fisica dei Quanti) e che ho tenuto per gli studenti del Corso di Studi in Ingegneria Fisica presso il Politecnico di Milano. Il libro esce a due anni di distanza dalla pubblicazione dell'"Introduzione alla Fisica dei Quanti" (anch'esso edito da EdiSES), che viene inglobato nel presente volume a costituirne la prima parte, cui se ne aggiunge una seconda più specificamente dedicata agli atomi.*

*L'utenza di riferimento è costituita da studenti universitari che siano già stati sufficientemente esposti a corsi di fisica di base, da cui ci aspetta una discreta conoscenza dei fondamenti della meccanica (del punto e dei sistemi) della termodinamica, dell'elettromagnetismo e ottica, dei fenomeni ondulatori in genere. Per quanto riguarda le conoscenze matematiche, è sufficiente una discreta familiarità con i numeri complessi, l'algebra lineare e il calcolo differenziale e integrale, anche se al solito conoscenze ulteriori (equazioni differenziali, analisi di Fourier, spazi funzionali), pur se non necessarie, risultano senz'altro utili. Poiché in ogni caso ci si rivolge a studenti relativamente alle prime armi, si è scelto di dare un'impostazione molto fenomenologica alla trattazione, privilegiando per quanto possibile gli aspetti sperimentali e introducendo i concetti quantistici in maniera molto graduale.*

*Il libro si apre con un capitolo introduttivo in cui le idee quantistiche vengono presentate in una prospettiva storica, volto sia a richiamare i fenomeni classici rilevanti che a familiarizzare con il radicale cambiamento della visione del mondo imposto dalle nuove scoperte e relative interpretazioni teoriche. Nonostante il taglio volutamente semplificato e non formale (o forse proprio per questo), ho ritenuto opportuno far precedere l'introduzione dei concetti quantistici da due capitoli dedicati a importanti branche della fisica classica, tradizionalmente non coperte nei corsi di fisica di base e in genere non presenti in quelli di fisica quantistica: la Meccanica Analitica (Cap. 2) e*

*la Meccanica Statistica (Cap. 3). La scelta di trattare tali discipline, seppure in maniera solo accennata e sicuramente non rigorosa, è motivata da un lato dall'esigenza di fornire un luogo istituzionale a tali argomenti (sono consapevole che si tratta di un'esigenza di completezza del tutto personale), dall'altro dalla loro efficacia per la migliore comprensione della fisica quantistica (si pensi ad esempio all'utilità di poter contare sulla conoscenza del formalismo hamiltoniano classico per introdurre quello quantistico, oppure sulla teoria degli ensemble di Gibbs per discutere il processo di misura in ambito quantistico).*

*L'impostazione fenomenologica torna protagonista nel Cap. 4 dedicato alla discussione del concetto di atomo, basata sull'analisi di numerosi fatti sperimentali. Lo stesso vale per il successivo Cap. 5, in cui, dopo aver discusso la termodinamica della radiazione (altro argomento che tradizionalmente ha sempre faticato a trovare spazio nei corsi di base) e il corpo nero, si introduce il concetto di fotone e si affronta il problema del dualismo onda-particella. Il Cap. 6 tratta in dettaglio del modello atomico di Bohr, uno dei massimi risultati dell'approccio fenomenologico, e si chiude con una discussione sulla "vecchia fisica dei quanti", che per quanto ormai superata permette tuttavia una visualizzazione dei vari fenomeni e processi, a mio modo di vedere molto utile per chi affronta temi quantistici per la prima volta, come appunto il pubblico cui il libro è rivolto.*

*La meccanica quantistica vera e propria, nella formulazione di meccanica ondulatoria, viene affrontata nei successivi cinque capitoli. Prima nella versione semplificata in una dimensione, con il Cap. 7, contenente la descrizione ondulatoria della materia a partire dall'ipotesi di de Broglie, il Cap. 8, interamente dedicato all'equazione di Schrödinger e in cui viene introdotto il concetto di operatore, e il Cap. 9, in cui tale equazione viene applicata a semplici ma rilevanti problemi unidimensionali. Si passa poi al caso tridimensionale trattando in particolare i sistemi a simmetria sferica e introducendo l'operatore momento angolare nel Cap. 10. A questo punto, quando il lettore dovrebbe aver acquisito un certo grado di familiarità con i concetti quantistici, viene presentato nel Cap. 11 il formalismo generale della teoria dei quanti (pur rinviando a testi specialistici per una trattazione rigorosa), con cenni anche ai metodi matriciali e alla formulazione di Dirac con "bra" e "ket".*



*Nel Cap. 12 si riprende lo studio degli atomi, fornendo una giustificazione teorica basata sull'equazione di Schrödinger dei risultati del modello di Bohr e discutendo le funzioni d'onda per l'atomo di idrogeno e idrogenoidi. Nello stesso capitolo viene anche trattata con un certo dettaglio l'interazione radiazione materia e le transizioni ottiche negli atomi a un elettrone. Lo spin, nuova grandezza puramente quantistica senza analogo classico, viene introdotto nel successivo Cap. 13, che include l'analisi dei fenomeni magnetici interni all'atomo e della struttura fine degli spettri atomici. I sistemi a molte particelle sono l'oggetto del Cap. 14, in cui vengono analizzate le conseguenze dell'indistinguibilità delle particelle e discusse le statistiche quantiche, completando quanto fatto nel capitolo 3 per il caso classico. Infine, nel Cap. 15 sono trattati gli atomi a molti elettroni, fino a discutere e giustificare la tavola periodica degli elementi chimici.*

*Ogni capitolo contiene numerosi esempi, in buona parte numerici. A questo proposito, ho cercato di sottolineare in tutto il libro l'importanza dei conti quantitativi, con l'obiettivo di richiamare l'attenzione degli studenti su questo aspetto troppo spesso trascurato, ritenendo essenziale che ci si renda conto del valore numerico dei risultati, almeno come ordine di grandezza. E' anche previsto un minimo di bibliografia, scelta con criteri del tutto personali tra le opere di più facile accesso, per chi volesse andarsi a rivedere concetti appena richiamati oppure approfondire gli argomenti trattati o in ogni caso guardarli da un altro punto di vista.*

*Il materiale qui presentato copre una serie di argomenti di fisica atomica e quantistica che possono essere trattati a un buon livello di approfondimento in un corso da 10 crediti formativi unitari (o cfu, l'unità di misura per i corsi universitari introdotta dalla riforma del 2000). Questo è il caso del corso di Laurea Triennale in Ingegneria Fisica al Politecnico di Milano, che prevede appunto un corso da 10 cfu dedicato a queste tematiche (al secondo semestre del secondo anno), il cui programma ricalca il contenuto del presente libro. A seconda delle esigenze didattiche, si può anche utilizzare solo la prima parte del volume (orientativamente i primi 9 capitoli) per un corso introduttivo da 5 cfu, che possa servire o come unica esposizione alle idee moderne della fisica (auspicabile per tutti i corsi di Laurea a carattere scientifico-tecnologico in genere e di Ingegneria in particolare), oppure come primo avvicinamento in vista di corsi ulteriori.*

*Infine, tra i numerosi difetti che i lettori avranno senz'altro modo di notare (e spero mi facciano pervenire le corrispondenti critiche) uno è già ben evidente all'autore, cioè l'assenza di esercizi e problemi che possano servire a mettere alla prova quanto si è appreso, magari con una soluzione da consultare dopo aver provato a risolverli da soli. A testimonianza della consapevolezza di tale mancanza ho riportato a fine libro il testo di numerosi problemi tratti da temi di esame da me preparati negli scorsi anni, ma purtroppo senza soluzione.*

*Milano, Dicembre 2011*

### ***Costanti fisiche fondamentali***

permeabilità dielettrica del vuoto	$\epsilon_0$	$= 8.8 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
velocità della luce nel vuoto	$c$	$= 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
costante di Boltzmann	$k_B$	$= 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
carica elementare	$e$	$= 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
massa di riposo dell'elettrone	$m_e$	$= 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$
massa di riposo del protone	$m_p$	$= 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ( $\sim 1840 m_e$ )
costante di Planck	$h$	$= 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$
costante di Planck ridotta	$\hbar$	$= h/2\pi = 1 \times 10^{-34} \text{ J s}$
costante di Rydberg	$R$	$= 1.1 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ (13.6 eV)
magnetone di Bohr	$\mu_B$	$= 9.3 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$
costante di struttura fine	$\alpha$	$= 7.3 \times 10^{-3}$ ( $137^{-1}$ )
numero di Avogadro	$N_A$	$= 6 \times 10^{23}$

Valori (approssimati) delle costanti fisiche fondamentali che compaiono più comunemente in fisica atomica, espresse nelle unità del Sistema Internazionale (SI)

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	
	1.1 Quantizzazione ovvero atomismo del mondo	1
	1.2 Campi e particelle	5
	1.3 Cenni storici: tappe fondamentali	10
<b>2</b>	<b>COMPLEMENTI DI FISICA CLASSICA</b>	
	2.1 Formalismo lagrangiano	13
	2.2 Formalismo hamiltoniano	18
	2.3 Distribuzione di Boltzmann ed equipartizione dell'energia	20
	2.4 Complementi, applicazioni, esempi	22
	2.4.1 Oscillatore armonico 1D	
	2.4.2 Sistema di due corpi interagenti con forza centrale; centro di massa	
	2.4.3 Particella in campo di forza $\sim r^{-2}$	
	2.4.4 Parentesi di Poisson	
	2.4.5 Calori specifici	
<b>3</b>	<b>ATOMI, PARTICELLE, RADIAZIONI</b>	
	3.1 Atomi: massa e dimensioni	39
	3.2 Altre particelle e radiazioni	45
	3.3 Sezione d'urto	49
	3.4 Modelli atomici	52
	3.5 Complementi, applicazioni, esempi	59
	3.5.1 Angolo solido	
	3.5.2 Misura del numero di Avogadro	
	3.5.3 La scoperta di nuove particelle e radiazioni	
	3.5.4 Raggio classico dell'elettrone	
	3.5.5 Derivazione della formula di Rutherford	
<b>4</b>	<b>LUCE: ONDE ELETTROMAGNETICHE E FOTONI</b>	
	4.1 Radiazione termica	71
	4.2 Il corpo nero	75
	4.3 Dalla formula di Rayleigh-Jeans a quella di Planck	78
	4.4 L'effetto fotoelettrico	83
	4.5 La diffusione Compton	89
	4.6 Onde o particelle?	92
	4.7 Complementi, applicazioni, esempi	93
	4.7.1 Richiamo sui principali fenomeni ondulatori	
	4.7.2 Diffrazione dei raggi X	
	4.7.3 Radiazione cosmica di fondo	
	4.7.4 Oscillatori quantizzati: da Planck a Einstein	
	4.7.5 Congelamento dei gradi di libertà nei calori specifici	
	4.7.6 Calore specifico dei solidi	
	4.7.7 Derivazione dello spostamento Compton	

<b>5</b>	<b>ATOMO DI BOHR</b>	
	5.1 Principi base della spettroscopia	105
	5.2 Spettro dell'atomo di idrogeno	106
	5.3 Postulati e modello di Bohr	109
	5.4 Moto del nucleo	114
	5.5 La "vecchia" Fisica dei Quanti	116
	5.6 Complementi, applicazioni, esempi	117
	5.6.1 Regole di quantizzazione di Sommerfeld-Wilson	
	5.6.2 Modello atomico di Sommerfeld: effetti relativistici nell'idrogeno	
	5.6.3 Atomo di Bohr e principio di corrispondenza	
	5.6.4 Sviluppi recenti: atomi di Rydberg e anti-idrogeno	
 <b>6</b>	 <b>ONDE DI MATERIA</b>	
	6.1 Lunghezza d'onda di de Broglie	125
	6.2 Diffrazione degli elettroni	128
	6.3 Dualismo onda-particella	130
	6.4 Pacchetti d'onda	140
	6.5 Principio di indeterminazione di Heisenberg	145
	6.6 Complementi, applicazioni, esempi	152
	6.6.1 Lunghezza d'onda di de Broglie e atomo di Bohr	
	6.6.2 Il microscopio elettronico	
	6.6.3 Natura ondulatoria delle particelle: esperimenti moderni	
	6.6.4 Principio di indeterminazione e stati legati	
	6.6.5 Principio di indeterminazione e stati eccitati	
	6.6.6 Particelle instabili	
 <b>7</b>	 <b>EQUAZIONE DI SCHROEDINGER</b>	
	7.1 Equazione per le onde di materia	161
	7.2 Interpretazione della funzione d'onda	164
	7.3 Proprietà delle funzioni d'onda	167
	7.4 Valori di aspettazione	169
	7.5 Equazione di Schrödinger non dipendente dal tempo: stati stazionari	173
	7.6 Quantizzazione dell'energia	178
	7.7 Complementi, applicazioni, esempi	181
	7.7.1 Densità di corrente di probabilità	
	7.7.2 Limite classico: teorema di Ehrenfest	
	7.7.3 Esperimento di Franck ed Hertz	
 <b>8</b>	 <b>PROBLEMI UNIDIMENSIONALI</b>	
	8.1 Buca di potenziale di profondità infinita	187
	8.2 Oscillatore armonico	195
	8.3 Particella libera	199
	8.4 Energia potenziale costante a tratti	203
	8.4.1 Gradino di potenziale	
	8.4.2 Barriera di potenziale	
	8.4.3 Buca di potenziale di profondità finita	

8.5	Complementi, applicazioni, esempi	223
8.5.1	Densità di probabilità e limite classico	
8.5.2	Limite classico e densità di stati	
8.5.3	Soluzione dell'equazione per l'oscillatore armonico	
8.5.4	Funzione delta di Dirac	
8.5.5	Modello degli elettroni liberi nei metalli	
8.5.6	Esempi di effetto tunnel	
<b>9</b>	<b>EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER IN 3D</b>	
9.1	Funzione d'onda in tre dimensioni	239
9.2	Particella in una buca di potenziale infinita 3D	240
9.3	Limite classico: Densità di Stati in 3D	243
9.4	Complementi, applicazioni, esempi	245
9.4.1	Problema dei due corpi in meccanica quantistica	
9.4.2	Condizioni periodiche al contorno: caso 1D e 3D	
<b>10</b>	<b>SISTEMI A SIMMETRIA SFERICA</b>	
10.1	Particella in campo centrale	251
10.2	Equazione angolare	253
10.3	Armoniche sferiche	255
10.4	Momento angolare	260
10.5	Complementi, applicazioni, esempi	266
10.5.1	Hamiltoniana in campo centrale: caso classico e quantistico	
10.5.2	Polinomi e funzioni associate di Legendre	
10.5.3	Armoniche sferiche in forma reale	
10.5.4	Armoniche sferiche e simmetria sferica	
10.5.5	Rotatore rigido	
<b>11</b>	<b>FORMALISMO DELLA TEORIA DEI QUANTI</b>	
11.1	Richiami di algebra lineare	273
11.2	Spazio di Hilbert	281
11.3	Grandezze fisiche e stati quantistici	285
11.4	Interpretazione statistica generalizzata	295
11.5	Sommario dei postulati	301
11.6	Complementi, applicazioni, esempi	302
11.6.1	Formulazione generale del teorema di Ehrenfest.	
11.6.2	Cenni alla teoria delle rappresentazioni	
11.6.3	Sistema a due livelli	
11.6.4	Sistemi a simmetria sferica	
11.6.5	Autovalori del momento angolare con metodi operatoriali	
11.6.6	Operatori innalzamento e abbassamento per l'oscillatore armonico	
<b>12</b>	<b>ATOMI A UN ELETTRONE</b>	
12.1	Equazione di Schrödinger per atomi a un elettrone	319
12.2	Autovalori e autofunzioni	323

12.3	Complementi, applicazioni, esempi	332
12.3.1	Gas nobili e atomi alcalini	
<b>13</b>	<b>SPIN</b>	
13.1	Spire e dipoli magnetici	335
13.2	Dipoli magnetici elementari: esperimento di Stern e Gerlach	340
13.3	Spin $1/2$	350
13.4	Somma di momenti angolari	354
13.5	Momento angolare totale	357
13.6	Complementi, applicazioni, esempi	358
13.6.1	Esperimenti SG in serie	
13.6.2	Elettrone in campo magnetico	
13.6.3	Effetto Einstein-de Haas	
13.6.4	Spin del fotone e regola di selezione per $j$	
<b>14</b>	<b>SISTEMI CON PIU' PARTICELLE</b>	
14.1	Approssimazione di particelle indipendenti	367
14.2	Indistinguibilità di particelle identiche	371
14.2	Bosoni e fermioni	374
14.3	Obbligo di simmetrizzazione e spin	375
14.4	Complementi, applicazioni, esempi	378
14.4.1	Distanza media tra particelle indistinguibili	
14.4.2	Determinanti di Slater	
<b>15</b>	<b>ATOMI A MOLTI ELETTRONI</b>	
15.1	Impostazione del problema	383
15.2	Atomo di elio e interazione di scambio	386
15.3	Approssimazione di campo centrale	394
15.4	Sistema periodico degli elementi chimici	401
15.5	Metodo autoconsistente di Hartree	408
15.6	Spettri di emissione di raggi X	413
15.7	Complementi, applicazioni, esempi	418
15.7.1	Correzione al prim'ordine delle energie per l'atomo di He	
15.7.2	Spin e antisimmetria per il campo centrale: metodo di Hartree-Fock	
15.7.3	Spettri di assorbimento di raggi X	
<b>16.</b>	<b>MULTIPLETTI E STRUTTURA FINE</b>	
16.1	Oltre l'approssimazione di campo centrale	427
16.2	Interazione spin-orbita	428
16.3	Accoppiamento LS e regole di Hund	433
16.4	Complementi, applicazioni, esempi	438
16.4.1	Doppio giallo del sodio	
16.4.2	Struttura fine dell'idrogeno	
16.4.3	Momento di dipolo magnetico totale e fattore di Landé	

16.4.4 Livelli energetici dell'atomo di carbonio

**APPENDICE A    MECCANICA STATISTICA CLASSICA**

**APPENDICE B    MECCANICA STATISTICA QUANTISTICA**

**APPENDICE C    TRANSIZIONI OTTICHE**

**BIBLIOGRAFIA**

**INDICE ANALITICO**



## 2. COMPLEMENTI DI FISICA CLASSICA

### 2.1 Formalismo lagrangiano

Per descrivere il moto di una particella o di un sistema di particelle in meccanica classica si utilizzano schemi avanzati che vanno oltre quello usato nei corsi di fisica di base basato sulle leggi di Newton. Tali schemi, argomento della *meccanica analitica*, permettono di formalizzare in maniera sistematica la meccanica, e costituiscono una via preferenziale per addentrarsi nei nuovi territori in cui domina la meccanica quantistica. Senza la pretesa di fornire una trattazione completa (per cui si rimanda ai testi nella bibliografia a fine capitolo), diamo dei cenni che permettano di usare tali schemi, iniziando dal formalismo lagrangiano.

Per utilizzare le leggi di Newton si deve descrivere il sistema usando coordinate cartesiane per i vari punti che lo compongono, raggruppate nei vettori posizione  $\mathbf{r}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ ; spesso risulta invece più utile usare coordinate generiche, il formalismo lagrangiano permette proprio di fare questa operazione. Innanzitutto bisogna introdurre il concetto di gradi di libertà:

*il numero di gradi libertà di un sistema è pari al numero di parametri (indipendenti) necessari per descrivere completamente il suo stato*

cioè un sistema ha  $n$  gradi di libertà se per definire il suo stato è necessario fornire  $n$  parametri. Tali parametri costituiscono le *coordinate generalizzate* del problema, come nei seguenti esempi

1 pallina	su un filo	$n = 1$	$x$
3 palline	su un filo	$n = 3 \times 1 = 3$	$(x_1, x_2, x_3)$
2 palline	nello spazio	$n = 2 \times 3 = 6$	$(x, y, z)_1, (x, y, z)_2$
1 pallina	nel piano	$n = 2$	$(x, y) ; (r, \theta)$

Per il caso dell'ultima riga con 2 gradi di libertà, abbiamo dato esplicitamente due diversi insiemi di coordinate, rispettivamente coordinate cartesiane e coordinate polari. In genere, per un sistema con  $n$  gradi di libertà, avremo  $n$  coordinate generalizzate, che indichiamo con la lettera  $q$ ; al solito con  $\dot{q}$  si intenderà la derivata rispetto al tempo (*velocità generalizzata*):

$$q_1, \dots, q_i, \dots, q_n \quad ; \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad (2.1)$$

Per determinare lo stato del sistema nel corso del tempo, bisognerà trovare come variano tutte le  $q$  in funzione del tempo:

$$q_i = q_i(t) \quad i = 1, \dots, n \quad ,$$

che equivalgono alle equazioni del moto.

Definiamo a questo punto la funzione di Lagrange, o lagrangiana  $\mathcal{L}$ , come differenza dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n, t) = \\ = K(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, t) = \\ \equiv K(q, \dot{q}) - V(q, t) \end{aligned} \quad (2.2) ,$$

dove si è implicitamente considerato di avere a che fare con forze conservative (le sole che ammettono un'energia potenziale), non è stata indicata per semplicità la dipendenza dal tempo delle  $q$ , e nell'ultima riga si è introdotta una scrittura più breve. Dalla definizione risulta evidente che le dimensioni fisiche della lagrangiana sono quelle di una energia; nel Sistema Internazionale (SI) le unità di misura sarà il Joule J. Se si considera un sistema di  $N$  punti materiali di massa  $m_i$  e si utilizzano coordinate cartesiane, come noto:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad ; \quad V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad .$$

Si introduce anche l'azione  $S$ , come integrale della lagrangiana nel tempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2.3)$$

le cui dimensioni sono quelle di un'energia per un tempo e si misura in J×s. Si usa poi il principio di minima azione per trovare le equazioni del moto: le  $q$  evolvono nel tempo in modo tale da rendere minima l'azione. Se cioè si tengono fissi lo stato iniziale e quello finale, il sistema evolve lungo la traiettoria per cui  $S$  è minimo, cioè  $\delta S = 0$ . Usando il calcolo variazionale si arriva infine alle equazioni di Lagrange (che non deriviamo):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4),$$

che sono proprio le leggi del moto e che, una volta risolte, forniscono la soluzione del problema. In modo più operativo e meno concettuale, si può evitare di passare per il principio di minima azione (che in ogni caso va assunto anche lui senza possibilità di dimostrazione) e prendere per buone le (2.4) a priori, salvo poi verificarne la validità a posteriori. Si tratta di  $n$  equazioni differenziali accoppiate del secondo ordine in  $t$ , che prendono il posto della legge di Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Nel caso di un sistema composto da  $N$  particelle nello spazio tridimensionale, avremo  $n = 3N$  e quindi un problema alquanto complesso appena il numero delle particelle supera poche unità.

**Esempio 2.1.** Consideriamo una particella in tre dimensioni e usiamo le solite coordinate cartesiane per descriverne la posizione: come diventano le (2.4) in questo caso?

Le grandezze di interesse sono:

$$n = 3 \quad ; \quad q_i \rightarrow \mathbf{r} \equiv (x, y, z) \quad ; \quad \dot{q}_i \rightarrow \mathbf{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$$

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad ; \quad V = V(x, y, z)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x} (K - V) = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v_x} (K - V) = \frac{\partial K}{\partial v_x} = mv_x \quad ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow ma_x \\ &\Rightarrow \text{dalla (2.4)} \quad F_x = ma_x \end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che in coordinate cartesiane l'energia cinetica non dipende dalle coordinate (in questo caso la posizione) ma solo dalle sue derivate (in questo caso la velocità), mentre l'energia potenziale non dipende dalla velocità e la sua derivata rispetto la coordinata è la componente della forza cambiata di segno. Troviamo quindi che le (2.4) si riducono alla seconda legge della dinamica di Newton, come c'era da aspettarsi.

Come abbiamo visto, se usiamo coordinate cartesiane le nuove leggi del moto sono in tutto e per tutto equivalenti a quelle di Newton, ma ora abbiamo anche uno strumento utilizzabile con altri sistemi di coordinate, magari più utili per descrivere il sistema. Inoltre il nuovo schema enfatizza il ruolo della *simmetria*<sup>1</sup>, permettendo di ricavare importanti informazioni sul sistema senza dover risolvere le equazioni. Immaginiamo,

<sup>1</sup> Le proprietà di simmetria giocano un ruolo molto importante in fisica, diventando determinanti soprattutto in meccanica quantistica. Anche se ne faremo uso più volte nel corso del libro, non è questo il luogo di approfondire queste tematiche che sono formalizzate nella *teoria dei gruppi*.

per esempio, che la lagrangiana non dipenda da una particolare coordinata  $q_k$ , che chiameremo *ciclica*, si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \text{costante}$$

abbiamo cioè trovato una quantità che rimane costante durante tutta l'evoluzione del sistema: sfruttando solo la simmetria siamo così in grado di trovare le *quantità conservate* o *costanti del moto*, il che è un bel passo avanti.

**Esempio 2.2.** Sia l'energia potenziale costante, e quindi non dipenda dalla coordinata  $q$ : in coordinate cartesiane non dipenderà dalla  $q$  neanche la lagrangiana (l'energia cinetica dipende solo dalla velocità):

$$\mathcal{L} = K - V = \mathcal{L}(\dot{q})$$

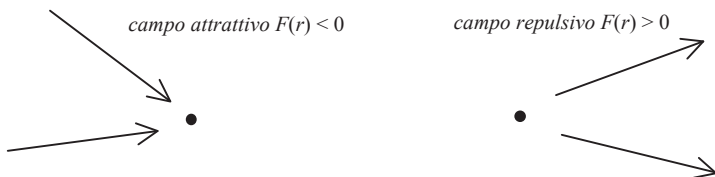
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial v_x} = mv_x = p_x$$

e troviamo che rimane costante la quantità di moto (useremo spesso il termine *momento*), o meglio la sua componente corrispondente alla coordinata in questione. Se l'energia potenziale non varia in nessuna delle tre direzioni allora sarà costante il vettore quantità di moto:

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} = \text{costante},$$

che è la *conservazione della quantità di moto* per un sistema non soggetto a forze: se l'energia potenziale è costante la forza è nulla.

**Esempio 2.3: forze centrali.** Questo è un caso di notevole importanza e col quale avremo più volte a che fare in seguito. Come noto, si definisce forza centrale una forza che è sempre diretta in maniera radiale da (o verso) un centro, detto centro di forza, e il cui modulo dipende solo dalla distanza da questo:  $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{u}_r$ , dove  $r \equiv |\mathbf{r}|$  è il modulo del vettore posizione (cioè la distanza dal centro) e  $\mathbf{u}_r$  è il versore della direzione uscente dal (o entrante nel) centro, come in Fig. 2.1.



**Fig. 2.1.** Campo di forza centrale: la forza è sempre diretta verso un punto detto centro di forze

Dalla meccanica elementare (si pensi al moto dei pianeti) si sa che il moto avviene in un piano; inoltre invece delle coordinate cartesiane si può pensare di usare quelle polari:  $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ . Il vantaggio sta nel fatto che in questo caso l'energia potenziale assume una forma molto semplice: se la forza dipende solo dalla distanza, così sarà per l'energia potenziale:  $V = V(r)$ , e non c'è la dipendenza da  $\theta$ . Il prezzo da pagare per aver semplificato l'energia potenziale è di aver invece resa più complicata l'espressione dell'energia cinetica, per

trovare la quale bisogna esprimere il modulo quadro della velocità in coordinate polari. A tal fine consideriamo i versori  $\mathbf{u}_r$ , diretto radialmente dal centro di forze, e  $\mathbf{u}_\perp$  ad esso perpendicolare, e le corrispondenti componenti radiali e trasversali della velocità,  $\mathbf{v}_r$  e  $\mathbf{v}_\perp$ , come in Fig. 2.2., in cui abbiamo anche introdotto la velocità radiale (in modulo) come derivata rispetto al tempo della distanza  $r$  dal centro e la velocità angolare  $\omega \equiv \dot{\theta}$  che entra nella velocità trasversale. Quindi l'energia cinetica in coordinate polari diventa

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_r^2 + \mathbf{v}_\perp^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (2.5).$$

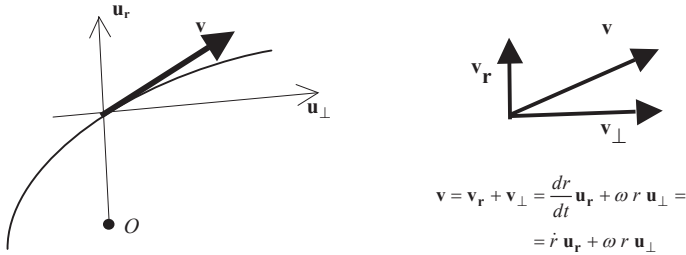


Fig. 2.2. Scomposizione del vettore velocità nelle componenti radiale e perpendicolare.

Introducendo le forme trovate nella lagrangiana si trova che essa non dipende dalla coordinata  $\theta$ ,  $\mathcal{L} = K - V = \mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\theta})$ , cioè  $\theta$  è una coordinata ciclica. La quantità conservata corrispondente sarà:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial (K - V)}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = m r^2 \omega = |\mathbf{L}|,$$

che altri non è che il modulo del vettore momento angolare  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Ritroviamo pertanto la conservazione del momento angolare valida per i campi di forze centrali, che corrisponde alla seconda legge di Keplero per il moto dei pianeti.

In genere si definisce si definisce *momento canonico*  $p_i$  associato alla coordinata generalizzata  $q_i$  la grandezza

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.6)$$

che prende anche il nome di *momento coniugato* alla  $q_i$ . Se la coordinata  $q_i$  è una coordinata spaziale cartesiana, il suo momento coniugato è la corrispondente componente della quantità di moto; se invece si tratta di una coordinata angolare il momento corrispondente è la componente del momento angolare perpendicolare al piano in cui varia l'angolo (cf. Esempio 2.3):

$$q_i \rightarrow x \Rightarrow p_i \rightarrow mv_x \quad ; \quad q_i \rightarrow \theta \Rightarrow p_i \rightarrow L_\theta$$

## 2.2 . Formalismo hamiltoniano

Le equazioni di Lagrange costituiscono un sistema di  $n$  equazioni differenziali alle derivate parziali del second'ordine nel tempo (c'è la derivata rispetto al tempo della derivata della lagrangiana rispetto alle velocità), dove ricordiamo che  $n$  è il numero di gradi di libertà del problema. E' possibile trasformare questo insieme di equazioni in un altro sistema di  $2n$  equazioni differenziali questa volta del primo ordine. Questo è quanto si fa nel *formalismo hamiltoniano*. Fondamentalmente si passa da una descrizione basata sulle coordinate e le velocità generalizzate a una basata sulle coordinate e i momenti coniugati:

$$(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow (q_i, p_i)$$

Mentre nel formalismo lagrangiano le velocità sono legate alle coordinate essendone le derivate rispetto al tempo, nel formalismo hamiltoniano le coordinate e i momenti vengono trattati come  $2n$  variabili del tutto indipendenti.

Il passaggio da un formalismo all'altro avviene tramite la definizione di una nuova funzione, la funzione di Hamilton o hamiltoniana, espressa in funzione delle nuove variabili, cioè le  $q$  e le  $p$ :

$$\mathcal{H}(q, p) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (2.7),$$

in cui le  $\dot{q}_i$  devono essere espresse in funzione di  $q$  e  $p$ . Partendo da questa definizione e dalla (2.6) si può dimostrare che l'hamiltoniana corrisponde all'energia totale del sistema (sempre espressa in funzione delle  $q$  e delle  $p$ )

$$\mathcal{H}(q, p) = K(q, p) + V(q) \quad (2.8)$$

dove si è tenuto conto che l'energia potenziale dipende solo dalle coordinate, mentre quella cinetica può dipendere anche dai momenti. Utilizzando poi le equazioni di Lagrange (2.4) si arriva a nuove equazioni del moto, le *equazioni di Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

che costituiscono per l'appunto il sistema di  $2n$  equazioni differenziali accoppiate del primo ordine che prende il posto delle (2.4). Guardando le (2.9) si nota subito come in questo formalismo le coordinate e i momenti giochino un ruolo del tutto simile: le equazioni sono del tutto simmetriche rispetto allo scambio delle  $q$  con le  $p$  (a parte il segno meno). Una volta risolte (si tratta di un compito tutt'altro che facile!), si ottengono le funzioni  $q(t)$  e  $p(t)$  che permettono di determinare lo stato del sistema istante per istante.

---

**Esempio 2.4: hamiltoniana di una particella in coordinate cartesiane.** Per scrivere l'hamiltoniana è necessario esprimere l'energia cinetica e potenziale in termini delle coordinate e dei momenti. L'energia potenziale  $V(\mathbf{r})$  è già nella forma richiesta, per quella cinetica:

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{(m\mathbf{v})^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (2.10),$$

e l'hamiltoniana diventa

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (2.11).$$


---

Nel formalismo hamiltoniano lo stato del sistema è completamente determinato una volta note tutte le  $q$  e le  $p$  usate per descriverlo (ripetiamo, considerate come indipendenti). Se si introduce uno spazio (se preferite iperspazio...) i cui assi siano dati da tutte le  $p$  e tutte le  $q$ , detto *spazio delle fasi* (indicato come spazio  $\Gamma$ ), il sistema stesso è rappresentato da un punto in tale spazio. Ad esempio, lo spazio delle fasi di una particella che si muove nello spazio usuale tridimensionale, e quindi con  $n = 3$ , ha 3 assi per le coordinate e 3 per i momenti, quindi si tratta di uno spazio a dimensione 6 (6D). In genere per  $N$  particelle nello spazio 3D, avremo  $n = 3N$ , per cui  $\Gamma$  avrà dimensione  $6N$ . E' evidente come  $\Gamma$  possa esser complicato e difficile da visualizzare appena  $N$  cresce sopra l'unità.

Come detto sopra, l'evoluzione temporale del sistema sarà data dalle funzioni  $q(t)$  e  $p(t)$  che si ricavano dalla soluzione delle equazioni di Hamilton (2.9) e che costituiscono l'equazione di una curva nello spazio  $\Gamma$ : abbiamo una traiettoria in questo spazio che rappresenta il moto del sistema, come schematizzato in Fig. 2.3 dove i due assi  $[q]$  e  $[p]$  rappresentano simbolicamente tutte le  $q$  e tutte le  $p$ .

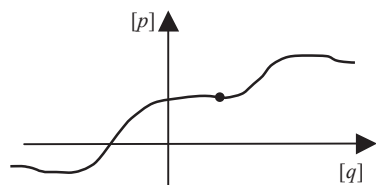


Fig. 2.3. Nello spazio delle fasi il sistema è rappresentato da un punto, e il suo moto è descritto da una curva.

Consideriamo infine quali sono le dimensioni fisiche del volume nello spazio delle fasi. Dalla (2.6) si vede che il prodotto  $p$  per  $\dot{q}$  ha le stesse dimensioni della lagrangiana, cioè di un'energia; il prodotto  $p$  per  $q$  ha quindi dimensioni di un'energia per un tempo, cioè una azione (unità di misura  $J \times s$ ). Il volume in  $\Gamma$  corrisponde a un prodotto  $p$  per  $q$  ripetuto per  $n$  volte, per cui le sue dimensioni sono  $[\text{azione}]^n$ , e nel caso di  $N$  particelle nello spazio fisico 3D,  $[\Gamma] = [\text{azione}]^{3N}$ .

### 2.3 Distribuzione di Boltzmann ed equipartizione dell'energia

Si consideri un sistema  $s$ , con un numero di particelle  $N$  fisso, immerso in un sistema molto più grande  $r$ , che costituisce una riserva di energia termica e con cui  $s$  può scambiare energia, mantenendo costante la temperatura. Abbiamo cioè il sistema in un termostato, situazione facilmente realizzabile sperimentalmente corrispondente a un sistema all'equilibrio termico, con temperatura mantenuta costante. Come sistema si può considerare sia un sistema macroscopico (formato da un numero di particelle  $N$  molto grande) sia uno microscopico ( $N$  piccolo, al limite una sola molecola); ovviamente si potranno fare discorsi di tipo termodinamico solo nel primo caso. A causa dei continui scambi col termostato (che assicurano la non variazione della temperatura), l'energia  $E$  del sistema non rimane costante e potremo parlare di energia media  $\langle E \rangle$ , dove si è introdotta la notazione dell'uso di parentesi aguzze  $\langle \dots \rangle$  per indicare la media. Se il sistema è macroscopico, questa corrisponde all'energia interna del sistema,  $U = \langle E \rangle$ , che risulta però del tutto ben definita. Si può infatti dimostrare che le fluttuazioni di energia intorno al valor medio valgono  $\frac{\delta E}{\langle E \rangle} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$ , cioè per un sistema contenete una mole di sostanza,  $N = N_A$ , le fluttuazioni sono del tutto trascurabili (non riusciremo mai a misurare e/o definire l'energia interna del sistema



meglio di una parte su cento miliardi!). Se invece il sistema è costituito da una sola particella le fluttuazioni raggiungono il 100%, com'è ovvio.

In tali condizioni, in meccanica statistica si trova che la probabilità  $\mathcal{P}(E)$  che il sistema abbia una certa energia  $E$  è data dalla *distribuzione di Boltzmann*:

$$\mathcal{P}(E) = \text{cost.} e^{-\beta E}, \quad \text{con } \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (2.12),$$

in cui  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \times \text{K}^{-1}$  è proprio la *costante di Boltzmann*. Il prodotto  $k_B T$  ha le dimensioni di una energia: per fissare le idee è utile ricordare che a temperatura ambiente ( $T \cong 300 \text{ K}$ ),  $k_B T \approx 25 \text{ meV}$ .

**Esempio 2.5: variazione della pressione atmosferica con la quota.** Un semplice modello dell'atmosfera terrestre la considera come un gas perfetto immerso nel campo di forza dovuto alla forza peso. Prendendo l'asse  $z$  perpendicolare al suolo e orientato verso l'alto, ogni singola molecola di massa  $m$  è soggetta a una energia potenziale  $V = mgz$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità e si è posta uguale a zero l'energia potenziale a quota nulla. In tal caso, utilizzando la distribuzione di Boltzmann si trova che la densità di molecole (che è proporzionale alla probabilità di trovare una molecola a una certa quota) varia con la quota come

$$n(z) = n(0) e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \quad (2.13).$$

Poiché a temperatura costante la pressione è proporzionale alla densità, questo significa che anche la pressione avrà un simile andamento con la quota, cioè  $p(z) = p_0 e^{-\alpha z}$ , risultato cui si giunge anche utilizzando la legge

di Stevino. Quantitativamente, la corrispondente variazione di pressione vale circa  $\frac{\Delta p}{p} \approx 10^{-4}$  per ogni metro.

Tale relazione è in discreto accordo coi dati sperimentali fino a circa 5000 metri sul livello del mare, più in alto le approssimazioni fatte (temperatura e forza gravitazionale costanti) non sono più realistiche e il modello non è più valido. Inoltre poiché nella (2.13) compare la massa delle molecole del gas, risulta che la composizione chimica dell'atmosfera varia con l'altitudine in modo che ad alte quote la componente di gas leggeri (idrogeno, elio) è più abbondante che al livello del mare.

Abbiamo visto che l'energia del sistema dipende dalle variabili  $q$  e  $p$  che lo descrivono nel formalismo hamiltoniano. Una situazione particolarmente interessante si presenta quando una di tali variabili, che indicheremo genericamente con  $x$ , entra nell'espressione dell'energia con un termine additivo quadratico, cioè l'energia può essere scritta come

$$E = ax^2 + f(q, p, \neq x) \quad (2.14),$$

dove la funzione  $f$  non dipendente da  $x$  rappresenta i contributi di tutte le altre variabili diverse dalla  $x$ . Nei corsi elementari di teorie cinetiche, con uso del tutto improprio del termine ma ormai consolidato, una variabile di questo tipo viene chiamata grado di libertà. L'energia media del sistema sarà pari a

$$\langle E \rangle = \langle ax^2 + f(q, p, \neq x) \rangle = \langle ax^2 \rangle + \langle f \rangle.$$

Se si va a calcolare il primo termine del membro di destra dell'espressione precedente, che rappresenta l'energia media associata alla  $x$ , cioè il contributo all'energia media del sistema dovuto a questa variabile, tenendo conto della distribuzione di Boltzmann, si trova

$$\langle ax^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (2.15).$$

E' questo il teorema di equipartizione dell'energia: *a ogni termine quadratico che compare nell'energia (impropriamente grado di libertà) compete sempre lo stesso contributo medio all'energia, pari alla metà della costante di Boltzmann per la temperatura*, questo indipendentemente dal tipo di variabile e di energia ad essa associato. Questo risultato afferma in pratica che in un sistema all'equilibrio termico c'è uno scambio continuo tra tutte le forme di energia in modo tale che a ciascuna di esse corrisponda in media lo stesso valore. Facciamo anche notare che nella derivazione non abbiamo fatto alcuna assunzione e/o approssimazione, dimostrando il risultato in maniera del tutto rigorosa, per questo si parla di *teorema*. Il che significa che un mancato accordo dei dati sperimentali con tale risultato non potrà essere imputato a inadeguatezze delle assunzioni, ma andrà a mettere in crisi l'impianto stesso della teoria, e in ultima analisi la descrizione del mondo data dalla fisica classica

## 2.4. Complementi, applicazioni, esempi

**2.4.1 Oscillatore armonico 1D.** Sia  $m$  la massa del corpo soggetto alla forza di richiamo e  $C$  la corrispondente costante elastica, definendo al solito la pulsazione come

$\omega = \sqrt{C/m}$ , avremo:

$$F = -Cx \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{2} Cx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

L'equazione del moto si ricava dalla (2.4) con  $q \rightarrow x$  e  $\dot{q} \rightarrow v$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} (mv) = ma = m\ddot{x} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -m\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Nel formalismo hamiltoniano, usando il momento canonico  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = mv$ , si arriva all'hamiltoniana dell'oscillatore armonico:

$$\mathcal{H} = K + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (2.16),$$

per poi scrivere le equazioni di Hamilton:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -m\omega^2 x \quad ; \quad \dot{q} = \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \rightarrow \dot{p} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Come c'era da aspettarsi in entrambi i casi si arriva alla solita equazione dell'oscillatore armonico; la soluzione com'è noto è del tipo  $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \text{Re } Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ , in cui  $A$  e  $\varphi$  sono l'ampiezza e la costante di fase determinabili dalle condizioni iniziali, e si è anche utilizzata l'utile forma esponenziale complessa che useremo molto spesso nel seguito.

Lo spazio delle fasi per una sola particella in 1D è molto semplice: si hanno solo due assi (una  $q$  e una  $p$ ):  $n = 1$  e  $\Gamma$  è bidimensionale, per cui il moto del punto può essere rappresentato in un piano. Dato che l'energia totale è una costante del moto, si può scrivere

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = E = \text{costante} \rightarrow \frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} + \frac{q^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\right)^2} = 1 \quad ,$$

che nello spazio  $(q, p)$  è l'equazione di un'ellisse con semiassi proporzionali all'energia: il punto che rappresenta il sistema in  $\Gamma$  si muove quindi su tale curva. In realtà, in fisica è sempre presente una imprecisione sperimentale, per cui il valore di una qualsiasi grandezza non può mai essere determinato con accuratezza infinita. Ciò vuol dire che anche l'energia sarà nota solo a meno di un intervallo  $\delta E$ , molto piccolo rispetto al

Franco Ciccacci

# Fondamenti di Fisica Atomica e Quantistica



[www.edises.it](http://www.edises.it)



€ 33,00

